Министерство образования Иркутской области
Государственное автономное учреждение Иркутской области
«Центр оценки профессионального мастерства, квалификаций
педагогов и мониторинга качества образования»

**Результаты**
**единого государственного экзамена**
**в Иркутской области в 2020 году**

**Методические рекомендации**

**<u>МАТЕМАТИКА</u>**



Иркутск, 2020 г.

Рецензент: Фалалеев М. В., доктор физико-математических наук, профессор, директор ИМЭИ ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений.

**Гаер М. А., Зенцов А. Г., Лапшина Е. С.**

Результаты государственной итоговой аттестации в форме единого государственного экзамена по математике в Иркутской области в 2020 году. Методические рекомендации / Гаер М. А., канд. техн. наук, Зенцов А. Г., Лапшина Е. С., канд. физ.-мат. наук, доцент. Иркутск: ГАУ ИО ГАУ ИО «Центр оценки профессионального мастерства, квалификаций педагогов и мониторинга качества образования», 2020. 48 с.

В методических рекомендациях представлены статистические данные о результатах ЕГЭ в Иркутской области. Проведен методический анализ результатов ЕГЭ по учебному предмету и анализ типичных затруднений выпускников региона при выполнении заданий ЕГЭ. Даны рекомендации по повышению качества образования по предмету.

Методические рекомендации предназначены для работников системы образования: специалистов органов управления образованием, специалистов организаций дополнительного профессионального образования, руководителей образовательных организаций и организаций среднего профессионального образования, учителей-предметников. Могут быть интересны обучающимся, их родителям, представителям широкой общественности.

Статистические данные представлены региональным центром обработки информации и мониторинга (комплекс программ РИС ГИА–11).

## СОДЕРЖАНИЕ

## Перечень условных обозначений, сокращений и терминов

| | |
|---|---|
| АТЕ | Административно-территориальная единица |
| ВПЛ | Выпускники прошлых лет |
| ВТГ | Выпускники текущего года |
| ГИА-11 | Государственная итоговая аттестация по образовательным программам среднего общего образования |
| ЕГЭ | Единый государственный экзамен |
| КИМ | Контрольные измерительные материалы |
| Участники ЕГЭ с ОВЗ | Участники ЕГЭ с ограниченными возможностями здоровья |
| ОО | Образовательная организация, осуществляющая образовательную деятельность по имеющей государственную аккредитацию образовательной программе |
| РИС | Региональная информационная система обеспечения проведения государственной итоговой аттестации обучающихся, освоивших основные образовательные программы основного общего и среднего общего образования |
| УМК | Учебник из Федерального перечня рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ основного общего и среднего общего образования |
| Участник ЕГЭ / участник экзамена / участник | Обучающиеся, допущенные в установленном порядке к ГИА в форме ЕГЭ, выпускники прошлых лет, допущенные в установленном порядке к сдаче ЕГЭ |

# 1. ХАРАКТЕРИСТИКА УЧАСТНИКОВ ЕГЭ ПО УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ

## 1.1. Количество участников ЕГЭ по учебному предмету (за 3 года)

*Таблица 1*

Количество участников ЕГЭ по математике

| 2018 | | 2019 | | 2020 | |
|---|---|---|---|---|---|
| чел. | % от общего числа участников | чел. | % от общего числа участников | чел. | % от общего числа участников |
| 9505 | 69 | 8713 | 61 | 7967 | 65 |

## 1.2. Процентное соотношение юношей и девушек, участвующих в ЕГЭ

*Таблица 2*

Соотношение юношей и девушек, участвующих в ЕГЭ

| Пол | 2018 | | 2019 | | 2020 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | чел. | % от общего числа участников | чел. | % от общего числа участников | чел. | % от общего числа участников |
| Женский | 4910 | 52 | 4365 | 50 | 3901 | 49 |
| Мужской | 4595 | 48 | 4348 | 50 | 4066 | 51 |

## 1.3. Количество участников ЕГЭ в регионе по категориям

*Таблица 3*

Количество участников ЕГЭ по категориям

| **Всего участников ЕГЭ по предмету** | 7967 |
|---|---|
| Из них:<br>выпускников текущего года, обучающихся по программам СОО | 7622 |
| выпускников текущего года, обучающихся по программам СПО | 31 |
| выпускников прошлых лет | 313 |
| выпускников прошлых лет, не завершивших ГИА | 1 |
| участников с ограниченными возможностями здоровья | 78 |

## 1.4. Количество участников ЕГЭ по типам ОО

*Таблица 4*

Количество участников ЕГЭ по типам ОО

| **Всего ВТГ** | 7653 |
|---|---|
| Из них:<br>выпускников лицеев и гимназий | 2033 |
| выпускников СОШ | 5504 |
| выпускников вечерних СОШ | 51 |
| выпускников СПО | 42 |
| выпускников кадетских корпусов | 23 |

## 1.5. Количество участников ЕГЭ по предмету по АТЕ региона

*Таблица 5*

Количество участников ЕГЭ по АТЕ региона

| № п/п | АТЕ | Количество участников ЕГЭ по учебному предмету | % от общего числа участников в регионе |
|---|---|---|---|
| 1. | Ангарский городской округ | 803 | 6,6 |
| 2. | Зиминское городское МО | 77 | 0,6 |
| 3. | Зиминское районное МО | 20 | 0,2 |
| 4. | г. Иркутск | 2507 | 20,5 |
| 5. | Иркутское районное МО | 242 | 2,0 |
| 6. | МО Аларский район | 63 | 0,5 |
| 7. | МО Балаганский район | 21 | 0,2 |
| 8. | МО Баяндаевский район | 41 | 0,3 |
| 9. | МО Боханский район | 62 | 0,5 |
| 10. | МО Братский район | 116 | 1,0 |
| 11. | МО город Саянск | 160 | 1,3 |
| 12. | МО город Свирск | 42 | 0,3 |
| 13. | МО город Тулун | 151 | 1,2 |
| 14. | МО город Усолье-Сибирское | 264 | 2,2 |
| 15. | МО город Усть-Илимск | 204 | 1,7 |
| 16. | МО город Черемхово | 148 | 1,2 |
| 17. | МО города Бодайбо и района | 51 | 0,4 |
| 18. | МО города Братска | 780 | 6,4 |
| 19. | МО Жигаловский район | 43 | 0,4 |
| 20. | МО Заларинский район | 74 | 0,6 |
| 21. | МО Иркутской области Казачинско-Ленский район | 57 | 0,5 |
| 22. | МО Катангский район | 4 | 0,0 |
| 23. | МО Качугский район | 49 | 0,4 |
| 24. | МО Киренский район | 45 | 0,4 |
| 25. | МО Куйтунский район | 59 | 0,5 |
| 26. | МО Мамско-Чуйский район | 11 | 0,1 |
| 27. | МО Нижнеилимский район | 147 | 1,2 |
| 28. | МО "Нижнеудинский район" | 188 | 1,5 |
| 29. | МО Нукутский район | 49 | 0,4 |
| 30. | МО Осинский муниципальный район | 76 | 0,6 |
| 31. | МО Слюдянский район | 161 | 1,3 |
| 32. | МО Тайшетский район | 187 | 1,5 |
| 33. | МО Тулунский район | 42 | 0,3 |
| 34. | МО Усть-Илимский район | 25 | 0,2 |
| 35. | МУ МО Эхирит-Булагатский район | 116 | 1,0 |
| 36. | Ольхонское районное МО | 37 | 0,3 |
| 37. | Районное МО Усть-Удинский район | 25 | 0,2 |
| 38. | Усольское районное МО | 97 | 0,8 |
| 39. | Усть-Кутское МО | 181 | 1,5 |
| 40. | Черемховское районное МО | 58 | 0,5 |
| 41. | Чунское районное МО | 77 | 0,6 |
| 42. | Шелеховский район | 241 | 2,0 |
| 43. | СПО г. Иркутска | 28 | 0,2 |
| 44. | ВПЛ г. Иркутска | 138 | 1,1 |

## 1.6. Выводы о характере изменения количества участников ЕГЭ по учебному предмету

Число участников, выбравших в 2020 году ЕГЭ по математике на профильном уровне, уменьшилось по сравнению с 2019 годом на 8,5%. Хотя процент от общего числа участников вырос по сравнению с предыдущим на 4 (61 – в 2019-м, 65 – в 2020-м). В прошлом, 2019 году по сравнению с 2018 годом также было уменьшение количества участников ЕГЭ по профильной математике примерно на 8%. При этом процент от общего числа участников по сравнению с предыдущим (2018 годом) тоже уменьшился примерно на столько же. Однако в прошлом году такой отток участников был связан с обязательным выбором только одного из двух экзаменов по математике: либо по профильной, либо по базовой. В такой ситуации выпускники, которым результаты по профильной математике были не нужны для поступления в вузы, не стали рисковать и выбрали ЕГЭ по базовой математике. В 2020 же году мы видим уменьшение числа участников ЕГЭ по профильной математике из-за уменьшения общего числа участников ЕГЭ. Этому, в свою очередь, поспособствовало, на наш взгляд, получение выпускниками аттестатов без сдачи ЕГЭ, то есть необходимость сдавать ЕГЭ была только у тех, кто собирался поступать в вуз.

В 2020 году, по сравнению с предыдущим, среди участников ЕГЭ по математике на профильном уровне значительно увеличилась доля выпускников прошлых лет, как в абсолютных числах (с 267 человек в 2019 году до 313 – в 2020 году), так и в процентном соотношении (с 3,1% в 2019 году до 3,9% в 2020 году). Не хотелось бы оставить без внимания тот факт, что среди ВПЛ всё больше становится участников, которые сдают экзамен не для поступления в вузы, а по другим причинам. Например, для повышения своей квалификации. Вернее, для того, чтобы показать окружающим свой уровень владения математикой. Результат ЕГЭ на 100 баллов часто используют репетиторы для привлечения клиентов.

В течение последних лет процент участников ЕГЭ по математике на профильном уровне, окончивших лицеи, гимназии и школы с углубленным изучением отдельных предметов, растет примерно по 0,5 в год. Не исключение и 2020 год: доля таких участников, по сравнению с прошлым годом, выросла с 25,8% до 26,6%, а это плюс 0,8%. Хотя общее число таких участников уменьшилось с 2175 до 2033, что составляет минус 142 выпускника. На наш взгляд, это связано с тем, что в лицеи и гимназии всё чаще идут учиться школьники с целью получения хорошей подготовки к ЕГЭ в целом, и по математике в частности. Статус лицеев и гимназий, их хорошие результаты позволяют привлекать как лучших учеников, так и лучших преподавателей.

В г. Иркутске доля участников от общего числа участников в регионе по профильной математике после снижения в 2019 году (на 2,3) значительно возросла в 2020 г. (на 3%), а это даже в абсолютных значениях больше предыдущего года на 14 человек (2493 – в 2019-м, и 2507 – в 2020-м), несмотря на снижение общего числа участников в этом году. Менее значительные изменения по этим показателям произошли в МО города Братска. После уменьшения их доли на 0,9% в 2019 году в 2020 году она выросла на 0,7%. Хотя число участников всё же меньше в 2020 году (780), чем было в 2019 году (809). В остальных АТЕ изменения, по сравнению с 2019 годом, незначительные – в пределах от 0,1% до 0,4 %.

# 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЕГЭ ПО ПРЕДМЕТУ

## 2.1. Диаграмма распределения тестовых баллов по предмету

*Рис. 1*

Распределение тестовых баллов по предмету (абсолютные значения)

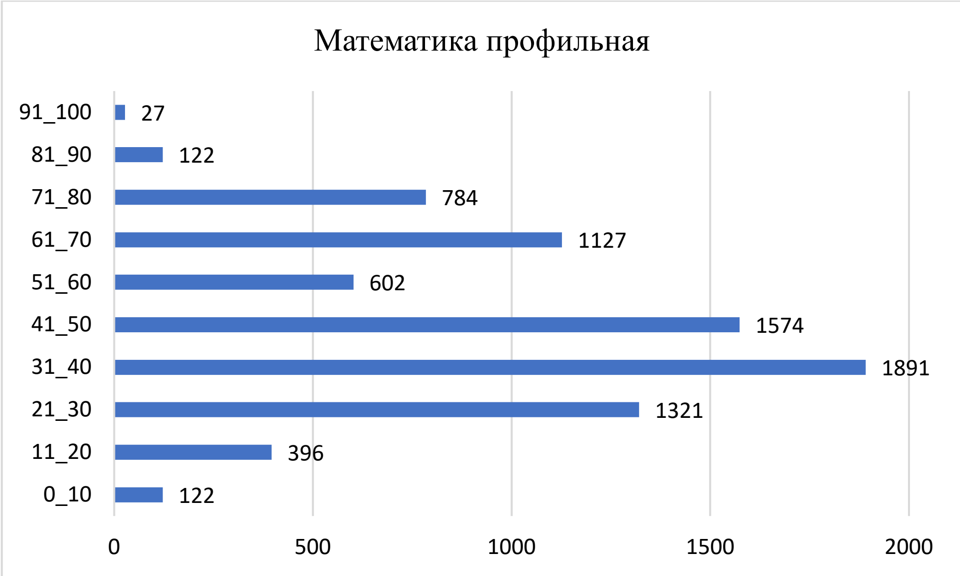
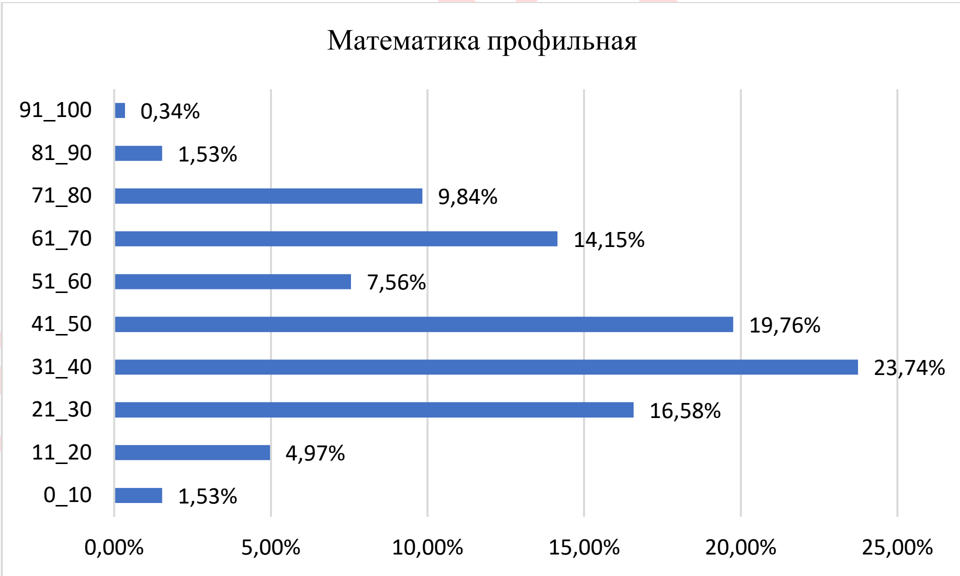



*Рис. 2*

Распределение тестовых баллов по предмету (относительные значения)




## 2.2. Динамика результатов ЕГЭ по предмету за последние 3 года

*Таблица 6*

| | Иркутская область | | |
|---|---|---|---|
| | **2018 г.** | **2019 г.** | **2020 г.** |
| Не преодолели минимального балла, % | 12 | 7 | 13 |
| Средний тестовый балл | 45 | 50 | 46 |
| Получили от 81 до 99 баллов, % | 1 | 3 | 2 |
| Получили 100 баллов, чел. | 1 | 7 | 2 |

## 2.3. Результаты по группам участников экзамена с различным уровнем подготовки

### **2.3.1.** В разрезе категорий участников ЕГЭ

*Таблица 7*

| | Выпускники текущего года, обучающиеся по программам СОО | Выпускники текущего года, обучающиеся по программам СПО | Выпускники прошлых лет | Участники ЕГЭ с ОВЗ |
|---|---|---|---|---|
| Доля участников, набравших балл ниже минимального | 12 | 58 | 28 | 13 |
| Доля участников, получивших тестовый балл от минимального балла до 60 баллов | 62 | 36 | 53 | 55 |
| Доля участников, получивших от 61 до 80 баллов | 24 | 7 | 16 | 31 |
| Доля участников, получивших от 81 до 99 баллов | 2 | 0 | 3 | 1 |
| Количество участников, получивших 100 баллов | 1 | 0 | 1 | 0 |

### **2.3.2.** В разрезе типа ОО

*Таблица 8*

| | Доля участников, получивших тестовый балл | | | | Количество участников, получивших 100 баллов |
|---|---|---|---|---|---|
| | ниже минимального | от минимального до 60 баллов | от 61 до 80 баллов | от 81 до 99 баллов | |
| СОШ | 15 | 66 | 19 | 1 | 0 |
| Лицеи, гимназии, школы с УИП | 5 | 51 | 39 | 5 | 1 |
| Кадетские корпуса | 30 | 65 | 4 | 0 | 0 |
| Вечерние СОШ | 35 | 59 | 6 | 0 | 0 |
| СПО | 43 | 50 | 7 | 0 | 0 |

### 2.3.3. Основные результаты ЕГЭ по предмету в сравнении по АТЕ

*Таблица 9*

| № | Наименование АТЕ | Доля участников, получивших тестовый балл | | | | Количество участников, получивших 100 баллов |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ниже минимального | от минимального до 60 баллов | от 61 до 80 баллов | от 81 до 99 баллов | |
| 1. | Ангарский городской округ | 11 | 58 | 28 | 3 | 1 |
| 2. | Зиминское городское МО | 12 | 71 | 17 | 0 | 0 |
| 3. | Зиминское районное МО | 20 | 70 | 10 | 0 | 0 |
| 4. | г. Иркутск | 11 | 58 | 29 | 3 | 0 |
| 5. | Иркутское районное МО | 15 | 67 | 17 | 1 | 0 |
| 6. | МО Аларский район | 10 | 73 | 14 | 3 | 0 |
| 7. | МО Балаганский район | 24 | 67 | 10 | 0 | 0 |
| 8. | МО Баяндаевский район | 5 | 73 | 22 | 0 | 0 |
| 9. | МО Боханский район | 23 | 68 | 10 | 0 | 0 |
| 10. | МО Братский район | 13 | 72 | 15 | 0 | 0 |
| 11. | МО город Саянск | 10 | 68 | 23 | 0 | 0 |
| 12. | МО город Свирск | 7 | 76 | 14 | 2 | 0 |
| 13. | МО город Тулун | 16 | 68 | 17 | 0 | 0 |
| 14. | МО город Усолье-Сибирское | 12 | 63 | 24 | 1 | 0 |
| 15. | МО город Усть-Илимск | 5 | 59 | 33 | 4 | 0 |
| 16. | МО город Черемхово | 11 | 60 | 29 | 0 | 0 |
| 17. | МО города Бодайбо и района | 14 | 71 | 16 | 0 | 0 |
| 18. | МО города Братска | 14 | 57 | 27 | 1 | 0 |
| 19. | МО Жигаловский район | 21 | 72 | 7 | 0 | 0 |
| 20. | МО Заларинский район | 22 | 69 | 9 | 0 | 0 |
| 21. | МО Иркутской области Казачинско-Ленский район | 11 | 79 | 9 | 2 | 0 |
| 22. | МО Катангский район | 0 | 50 | 50 | 0 | 0 |
| 23. | МО Качугский район | 16 | 71 | 12 | 0 | 0 |
| 24. | МО Киренский район | 16 | 69 | 16 | 0 | 0 |
| 25. | МО Куйтунский район | 17 | 69 | 14 | 0 | 0 |
| 26. | МО Мамско-Чуйский район | 0 | 73 | 27 | 0 | 0 |
| 27. | МО Нижнеилимский район | 10 | 61 | 28 | 1 | 0 |
| 28. | МО "Нижнеудинский район" | 10 | 72 | 18 | 0 | 0 |
| 29. | МО Нукутский район | 18 | 76 | 6 | 0 | 0 |
| 30. | МО Осинский муниципальный район | 17 | 64 | 18 | 0 | 0 |
| 31. | МО Слюдянский район | 16 | 65 | 19 | 0 | 0 |
| 32. | МО Тайшетский район | 21 | 62 | 16 | 1 | 0 |
| 33. | МО Тулунский район | 14 | 71 | 14 | 0 | 0 |
| 34. | МО Усть-Илимский район | 28 | 64 | 8 | 0 | 0 |
| 35. | МУ МО Эхирит-Булагатский район | 15 | 63 | 22 | 0 | 0 |
| 36. | Ольхонское районное МО | 27 | 65 | 8 | 0 | 0 |

| № | Наименование АТЕ | Доля участников, получивших тестовый балл | | | | Количество участников, получивших 100 баллов |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ниже минимального | от минимального до 60 баллов | от 61 до 80 баллов | от 81 до 99 баллов | |
| 37. | Районное МО Усть-Удинский район | 24 | 72 | 4 | 0 | 0 |
| 38. | Усольское районное МО | 7 | 75 | 18 | 0 | 0 |
| 39. | Усть-Кутское МО | 18 | 56 | 23 | 3 | 0 |
| 40. | Черемховское районное МО | 24 | 55 | 19 | 2 | 0 |
| 41. | Чунское районное МО | 9 | 64 | 27 | 0 | 0 |
| 42. | Шелеховский район | 12 | 60 | 24 | 4 | 0 |
| 43. | СПО г. Иркутска | 50 | 39 | 11 | 0 | 0 |
| 44. | ВПЛ г. Иркутска | 22 | 49 | 22 | 5 | 1 |

### 2.4. Перечень ОО, продемонстрировавших наиболее высокие результаты ЕГЭ по предмету

В Иркутской области в 2020 году принимало участие в ЕГЭ по математике 555 образовательных организаций. Наименьшее количество участников от одной ОО было равно 1. Таких ОО набралось 58. В трёх образовательных организациях количество участников превысило 100 человек: МАОУ ЦО № 47 г. Иркутска (104 участника), МАОУ "Ангарский лицей № 2 им. М.К. Янгеля" (112 участников), МБОУ г. Иркутска лицей № 3 (118 участников). Количество ОО с более чем 10 участниками составило 233 организации. Именно из этих ОО и были выбраны организации, продемонстрировавшие наиболее высокие результаты ЕГЭ по математике. В этот список вошли ОО, у которых доля участников ЕГЭ, получивших от 81 до 100 баллов, имеет максимальные значения (от 7% и выше), доля участников ЕГЭ, не достигших минимального балла, имеет минимальные значения (не более 4%), а доля участников, набравших от минимального значения до 60 баллов, не превышала 45%. Удовлетворяющих таким требованиям образовательных организаций получилось 8.

В список с наиболее высокими результатами вошли 8 ОО (это менее 5 % от всех рассмотренных ОО с более чем 10 участниками). При этом были исключены те образовательные организации, в которых доля участников, не достигших минимального балла, превысила 4%. Традиционно занимающие две верхние строчки этого рейтинга МБОУ "СОШ № 10" (Ангарский городской округ) и МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска опустились на 1 позицию и занимают теперь 2-ю и 3-ю строчки соответственно. Первую же строчку занимает МБОУ г. Иркутска лицей-интернат № 1, который в 2019 году в этот список даже не попал. Отметим, однако, что в МБОУ г. Иркутска лицей-интернат № 1 доля участников, не достигших минимального балла, составляет 4%, в то время как в

МБОУ "СОШ № 10" (Ангарский городской округ) и МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска эта доля равна 0.

*Таблица 10*

ОО, продемонстрировавшие наиболее высокие результаты ЕГЭ по предмету

| № | Наименование ОО | Доля участников, получивших от 81 до 100 баллов | Доля участников, получивших от 61 до 80 баллов | Доля участников, не достигших минимального балла |
|---|---|---|---|---|
| 1. | МБОУ г. Иркутска лицей-интернат № 1 | 19 | 38 | 4 |
| 2. | МБОУ "СОШ № 10" г. Ангарск | 16 | 46 | 0 |
| 3. | МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска | 14 | 63 | 0 |
| 4. | МБОУ г. Иркутска лицей № 2 | 13 | 49 | 0 |
| 5. | МБОУШР "Шелеховский лицей" | 13 | 47 | 4 |
| 6. | МОУ "Ульканская СОШ №2" (МО Иркутской области Казачинско-Ленский район) | 8 | 42 | 0 |
| 7. | МБОУ "Лицей № 2" г. Братска | 7 | 53 | 0 |
| 8. | МБОУ г. Иркутска лицей № 3 | 7 | 56 | 3 |

### 2.5. Перечень ОО, продемонстрировавших низкие результаты ЕГЭ по предмету

Требования к перечню ОО, продемонстрировавших низкие результаты ЕГЭ по математике профильного уровня, следующие:

- количество участников в ОО более 10;
- доля участников ЕГЭ, не достигших минимального балла, имеет максимальные значения – 25 и более;
- доля участников ЕГЭ, получивших от 61 до 100 баллов, имеет минимальные значения – от 15 и ниже.

Удовлетворяющих таким требованиям образовательных организаций получилось 25, что составляет 11% от 233 организаций с более чем 10 участниками.

*Таблица 11*

ОО, продемонстрировавшие наиболее низкие результаты ЕГЭ по предмету

| № | Наименование ОО | Доля участников, не достигших минимального балла | Доля участников, получивших от 61 до 80 баллов | Доля участников, получивших от 81 до 100 баллов |
|---|---|---|---|---|
| 1. | МБОУ Троицкая СОШ (МО Заларинский район) | 55 | 0 | 0 |
| 2. | МОУ ОСШ г. Черемхово | 47 | 0 | 0 |
| 3. | ГОКУ УГКК г. Усолья-Сибирского | 43 | 0 | 0 |
| 4. | МКОУ СОШ № 14 г. Тайшета | 39 | 6 | 0 |

| № | Наименование ОО | Доля участников, не достигших минимального балла | Доля участников, получивших от 61 до 80 баллов | Доля участников, получивших от 81 до 100 баллов |
|---|---|---|---|---|
| 5. | МБОУ г. Братска "СОШ № 12 имени В. Г. Распутина" | 38 | 15 | 0 |
| 6. | МБОУ г. Братска "СОШ № 13" | 38 | 0 | 0 |
| 7. | МБОУ "СОШ № 43" г. Братска | 36 | 14 | 0 |
| 8. | МОУ ИРМО "Хомутовская СОШ № 1" (Иркутское районное МО) | 35 | 0 | 6 |
| 9. | МБОУ г. Иркутска СОШ № 66 | 35 | 13 | 0 |
| 10. | МБОУ г. Иркутска СОШ № 45 | 33 | 0 | 0 |
| 11. | МБОУ г. Иркутска СОШ № 10 им. П. А. Пономарева | 33 | 13 | 0 |
| 12. | МБОУ "СОШ № 15" г. Ангарск | 32 | 14 | 0 |
| 13. | МКОУ СОШ № 10 г. Бирюсинска (МО Тайшетский район) | 29 | 14 | 0 |
| 14. | МБОУ г. Иркутска СОШ № 49 | 28 | 13 | 0 |
| 15. | МБОУ г. Иркутска СОШ № 37 | 27 | 0 | 0 |
| 16. | МКОУ Центр образования "Возрождение" (МО Куйтунский район) | 27 | 0 | 0 |
| 17. | МБОУ СОШ п. Усть-Уда (Районное МО Усть-Удинский район) | 27 | 9 | 0 |
| 18. | МБОУ "Мишелевская СОШ № 19" (Усольское районное МО) | 27 | 9 | 0 |
| 19. | МКОУ "Средняя школа № 1" (МО Киренский район) | 27 | 7 | 0 |
| 20. | МБОУ "СОШ № 9" г. Ангарск | 25 | 6 | 0 |
| 21. | МБОУ г. Иркутска СОШ №7 | 25 | 8 | 4 |
| 22. | МБОУ г. Иркутска СОШ №17 | 25 | 7 | 4 |
| 23. | МБОУ "СОШ № 2" г. Тулуна | 25 | 10 | 0 |
| 24. | МБОУ "СОШ № 40" г. Братска | 25 | 0 | 0 |

## 2.6. Выводы о характере изменения результатов ЕГЭ по предмету

Анализ динамики результатов ЕГЭ по математике за последние 3 года показывает, что в 2020 году уровень среднего тестового балла, доли получивших от 81 до 99 баллов, получивших 100 баллов и тех, кто не преодолел минимального балла, примерно такие же, как и в 2018 году, что хуже, чем в 2019 году. Получается, что в 2019 году по этим показателям был скачок в лучшую сторону. Однако в 2020 году все они вернулись к прежнему уровню. Доля участников, получивших тестовый балл от минимального балла до 60 баллов, в 2018-2020 годах почти не менялась (2018-й – 66, 2019-й – 62, 2020-й – 62). Основные изменения пришлись на долю участников, набравших от 61 до 80 баллов (2018-й – 22, 2019-й – 29, 2020-й – 24). То есть видим опять-таки небольшой скачок в лучшую сторону в 2019 году. Все эти тенденции прослеживаются и в разрезе по типам ОО. На наш взгляд, этот скачок в 2019 году объясняется тем, что уровень сложности заданий в вариантах 2019 года был более низкий, по сравнению с уровнем сложности заданий вариантов 2018 и 2019 годов.

Отметим еще здесь, что доля участников, обучающихся в лицеях и гимназиях по сравнению с обычными СОШ, получивших тестовый балл от 61 до 80 и от 80 до 100, традиционно значительно выше на протяжении всех трёх лет, что естественно, ведь математика в таких ОО изучается по углублённым программам.

Сравнение результатов ЕГЭ по математике профильного уровня по АТЕ показало следующее.

В некоторых АТЕ наблюдается существенный рост доли участников, набравших балл в 2020 году ниже минимального, по сравнению с 2019 и 2018 годами. К ним относятся: МО город Тулун (2018-й – 5, 2019-й – 2, 2020-й – 16), МО Киренский район (2018-й – 8, 2019-й – 2, 2020-й – 16), МО Тайшетский район (2018-й – 17, 2019-й – 8, 2020-й – 21), МО Усть-Илимский район (2018-й – 16, 2019-й – 0, 2020-й – 28), Районное МО Усть-Удинский район (2018-й – 21, 2019-й – 0, 2020-й – 24). При этом видно, что Тайшетский и Усть-Удинский районы в 2020 году вернулись примерно к таким же показателям, какие были в 2018 году после их скачка в лучшую сторону в 2019 году. Об этом скачке мы уже писали выше. А вот в городе Тулуне, Киренском и Усть-Илимском районах показатель значительно ухудшился в 2020 году по сравнению и с 2018, и с 2019 годами. В МО Усть-Илимский район это, возможно, связано с тем, что количество участников в 2020 году снизилось в 2 раза по сравнению с 2018 годом (2018-й – 44, 2020-й – 25), и стало очень маленьким для статистических расчётов. То есть в абсолютных числах, что в 2018, что в 2020 годах было 7 участников, набравших балл ниже минимального. Тут каждый участник – это сразу 4%. А вот в МО Киренский район и в МО город Тулун изменение количества участников по годам значительной роли не играет.

В следующих АТЕ выросла доля участников, получивших тестовый балл от минимального балла до 60 баллов, в 2020 году по сравнению с 2019 и 2018 годами. К ним относятся: МО Братский район (2018 – 67, 2019 – 69, 2020 - 72), МО город Свирск (2018 – 70, 2019 – 64, 2020 - 76), МО города Бодайбо и района (2018 – 61, 2019 – 59, 2020 - 71), Усольское районное МО (2018 – 63, 2019 – 67, 2020 - 75).

С другой стороны, есть немало АТЕ, где доля участников, получивших тестовый балл от минимального балла до 60 баллов, в 2020 году по сравнению с 2019 и 2018 годами значительно снизилась: МО Балаганский район (2018-й – 79, 2019-й – 77, 2020-й – 67), МО Боханский район (2018-й – 77, 2019-й – 81, 2020-й – 68), МО Тайшетский район (2018-й – 71, 2019-й – 78, 2020-й – 62), МУ МО

Эхирит-Булагатский район (2018-й – 73, 2019-й – 74, 2020-й – 64), Усть-Кутское МО (2018-й – 66, 2019-й – 74, 2020-й – 56), Черемховское районное МО (2018-й – 75, 2019-й – 71, 2020-й – 55). При этом во всех указанных АТЕ увеличилась доля участников, набравших балл ниже минимального, что и повлекло за собой уменьшение доли участников, получивших тестовый балл от минимального балла до 60 баллов.

Доля участников, получивших от 61 до 80 баллов, в 2020 году по сравнению с 2019 и 2018 годами существенно повысилась в Чунском районном МО (2018-й – 18, 2019-й – 16, 2020-й – 27). Уменьшение доли участников, получивших от 61 до 80 баллов, в 2020 году по сравнению с 2019 и 2018 годами наблюдается в МО город Тулун (2018-й – 22, 2019-й – 32, 2020-й – 17) и в МО города Бодайбо и района (2018-й – 31, 2019-й – 36, 2020-й – 16).

При составлении перечня ОО, продемонстрировавших наиболее высокие и наиболее низкие результаты ЕГЭ по математике, были рассмотрены показатели 233 образовательных организаций региона с более чем 10 участниками.

В список с наиболее высокими результатами вошли 8 ОО. При этом были исключены те образовательные организации, в которых доля участников, не достигших минимального балла, превысила 5%. Традиционно занимающие две верхние строчки этого рейтинга МБОУ "СОШ № 10" (Ангарский городской округ) и МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска опустились на 1 позицию и занимают теперь 2-ю и 3-ю строчки соответственно. Первую же строчку занимает МБОУ г. Иркутска лицей-интернат № 1, который в 2019 году в этот список даже не попал. Отметим, однако, что в МБОУ г. Иркутска лицей-интернат № 1, доля участников, не достигших минимального балла, составляет 4%, в то время как в МБОУ "СОШ № 10" (Ангарский городской округ) и МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска эта доля равна 0.

В перечень ОО, продемонстрировавших низкие результаты ЕГЭ по предмету, включено 25 образовательных организаций из 233, что составляет примерно 11%. Доля участников, не достигших минимального балла, в этих ОО составила в 2020 году от 25 до 55%. Почти половина ОО, попавших в этот перечень, в 2019 году выпускали менее 10 человек, поэтому ранее они даже не рассматривались. 8 образовательных организаций, а это примерно 30% школ из данного перечня – школы города Иркутска (МБОУ СОШ № 66, МБОУ СОШ № 45, МБОУ СОШ № 10 им. П. А. Пономарева, МБОУ СОШ № 49, МБОУ г. Иркутска СОШ № 37, МБОУ СОШ № 7, МБОУ СОШ № 17).

# 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ИЛИ ГРУПП ЗАДАНИЙ

## 3.1. Краткая характеристика КИМ по учебному предмету

Изменения структуры КИМ отсутствуют.

К содержательным особенностям КИМ **профильного** ЕГЭ-2020 по математике основного периода можно отнести:

1) типы заданий базового уровня № 1-7 полностью соответствуют представленным в демонстрационном варианте КИМ ЕГЭ по профильной математике–2020; в задании № 8 изменено требование – поиск объема призмы, а не площади поверхности. Все задания базового уровня достаточно простые, ответы могут быть получены посредством несложного устного счета;

2) в геометрическом задании № 14 у обучающихся возникли определенные логические трудности в проведении доказательства принадлежности точки плоскости и в его описании;

3) обучающиеся с хорошей математической подготовкой решали геометрическое задание № 16 вполне алгоритмическим способом, применяя теорему Менелая (тем не менее процент его выполнения оказался все равно очень низким);

4) «экономическое» задание № 17 в 2020 году оказалось достаточно понятным для обучающихся, однако многие из них просто подбирали правильный ответ (подбор нетрудно организовывался в соответствующих вариантах) и проверяли его, не считая нужным обосновывать его единственность.

## 3.2. Анализ выполнения заданий КИМ

*Таблица 12*

Процент выполнения заданий в Иркутской области по группам участников с различным уровнем подготовки

| Номер задания в КИМ | Проверяемые элементы содержания / умения | Уровень сложности задания | Процент выполнения задания в Иркутской области[1] | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | средний | в группе не преодолевших минимальный балл | в группе от минимального до 60 т. б. | в группе от 61 до 80 т. б. | в группе от 81 до 100 т. б. |
| 1 | Алгебра / Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | Б | 93 | 72 | 96 | 99 | 100 |
| 2 | Функции / Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | Б | 96 | 85 | 97 | 99 | 99 |
| 3 | Геометрия / Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | Б | 87 | 48 | 90 | 98 | 99 |
| 4 | Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей / Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | 83 | 48 | 85 | 96 | 99 |
| 5 | Уравнения и неравенства / Уметь решать уравнения и неравенства | Б | 95 | 73 | 98 | 100 | 99 |
| 6 | Геометрия / Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | Б | 82 | 36 | 85 | 97 | 100 |
| 7 | Начала математического анализа / Уметь выполнять действия с функциями | Б | 65 | 24 | 62 | 91 | 99 |
| 8 | Геометрия / Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | Б | 30 | 2 | 20 | 66 | 93 |
| 9 | Алгебра / Уметь выполнять вычисления и преобразования | П | 46 | 3 | 37 | 87 | 97 |
| 10 | Функции / Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | П | 70 | 11 | 71 | 96 | 99 |

[1] Вычисляется по формуле $p = \frac{N}{nm} \cdot 100\%$, где N – сумма первичных баллов, полученных всеми участниками группы за выполнение задания, n – количество участников в группе, m – максимальный первичный балл за задание.

| Номер задания в КИМ | Проверяемые элементы содержания / умения | Уровень сложности задания | Процент выполнения задания в Иркутской области[1] | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | средний | в группе не преодолевших минимальный балл | в группе от минимального до 60 т. б. | в группе от 61 до 80 т. б. | в группе от 81 до 100 т. б. |
| 11 | Уравнения и неравенства / Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | П | 54 | 3 | 47 | 96 | 99 |
| 12 | Начала математического анализа / Уметь выполнять действия с функциями | П | 37 | 4 | 28 | 75 | 97 |
| 13 | Уравнения и неравенства / Уметь решать уравнения и неравенства | П | 14 | 0 | 3 | 46 | 95 |
| 14 | Геометрия / Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | П | 1,4 | 0 | 0,03 | 3 | 41 |
| 15 | Уравнения и неравенства / Уметь решать уравнения и неравенства | П | 5 | 0 | 0,1 | 13 | 89 |
| 16 | Геометрия / Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | П | 0,6 | 0 | 0,01 | 0,5 | 24 |
| 17 | Алгебра / Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | П | 18 | 0 | 2 | 64 | 98 |
| 18 | Уравнения и неравенства / Уметь решать уравнения и неравенства | В | 0,8 | 0 | 0 | 1 | 27 |
| 19 | Алгебра / Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | В | 2 | 0,02 | 0,6 | 5 | 23 |



На основании среднего процента выполнения к заданиям с наименьшим процентом выполнения можно отнести задания базового уровня № 8 (стереометрия), № 9 (тригонометрия) и все задания повышенного и высокого уровней с развернутым ответом за исключением экономической задачи: №№ 13, 14, 15, 16, 18, 19. Экономическая задача № 17 в 2020 году имеет более высокий процент выполнения (18%) за счет достаточно понятной школьникам экономической модели.

Группа участников ЕГЭ, не достигших минимального балла, относительно успешно справилась *только* с заданиями базового уровня № 1, 2, 5.

Для школьников группы, набравших от минимального до 60 т. б., среди заданий базового уровня наиболее трудной оказалась стереометрическая задача № 8. Задания с развернутым ответом имеют очень низкие проценты выполнения (меньше 3).

Для группы набравших от 61 до 80 т.б . к проблемным заданиям относятся задания повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом: № 14, 15, 16, 18, 19 (процент выполнения ниже 15).

В группе набравших от 81 т. б. процент выполняемости всех заданий базового уровня выше 50, процент выполняемости всех заданий повышенного и высокого уровней выше 15.

В целом наибольшую сложность традиционно представляют стереометрия (и на базовом, и на повышенном уровне) и планиметрия (повышенный уровень), что свидетельствует о плохом владении подавляющего большинства школьников геометрией.

Анализ выполнения заданий по всем элементам содержания показывает, что если на базовом уровне школьники справляются с соответствующими заданиями, то на повышенном и высоком процент выполнения заданий резко снижается. К примеру, по элементу «Алгебра» процент выполнения (в среднем) задания № 1 – 93% (задача с практико-ориентированным содержанием), задания 9 – 46% (тригонометрическая задача, требует более глубокого понимания формул и алгебраических преобразований), задания № 17 – 18% (задача с экономическим содержанием, в решении которой с помощью алгебраических методов строится математическая модель экономической ситуации), задания № 19 – 2% (логико-комбинаторная задача нестандартного характера, где алгебраические выкладки используются в рамках довольно сложного технически доказательства). То же самое можно наблюдать относительно других элементов содержания.

В связи с этим считаем, что нельзя выделить успешно усвоенные элементы содержания. К особо проблемным зонам относятся «Геометрия», «Начала математического анализа».

Приведем задания с развёрнутым ответом из *открытого варианта КИМ* основного дня ЕГЭ-2020. Указанные *типичные ошибки* относятся ко всем вариантам задания в целом.

**ЗАДАЧА № 13**

а) Решите уравнение $2\sqrt{3}\ \sin^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin 2x=0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5}{2}\pi\right]$.

*Типичные ошибки:*

1) ошибки в тригонометрических формулах (формулы приведения, формулы решения простейших тригонометрических уравнений и др.);

2) ошибки в отборе корней.

## ЗАДАЧА № 13 (ПРИМЕР 1)

13. а) $2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin 2x=0$

$2\sqrt{3}\cos^2 x+\sin 2x=0$

$2\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x\cdot\sin x=0$

$\cos x(2\sqrt{3}\cos x+2\sin x)=0$

$2\cos x(\sqrt{3}\cos x+\sin x)=0$

$2\cos x=0$ $\qquad$ $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$ $\qquad$ $\cancel{\cos x\neq}$ $;\ \sin x\neq 0$

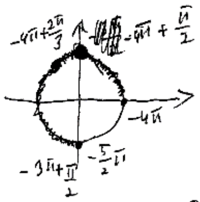
$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $\sqrt{3}\,ctg x+1=0$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \\ x=\frac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z\end{array}\right.$ $\qquad$ $ctg x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x=\frac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

б) $x\in\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$

$x=-\frac{7\pi}{2};-\frac{10\pi}{3};-\frac{5\pi}{2}$




Пример 1 демонстрирует верное решение задачи. Решено тригонометрическое уравнение, обоснован отбор корней на промежутке.

**Оценка эксперта**: 2 балла.

## ЗАДАЧА № 13 (ПРИМЕР 2)

13. $2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin 2x=0$

$2\sqrt{3}\cos^2 x+\sin 2x=0$

$2\sqrt{3}\cos^2 x+2\sin x\cos x=0$

$2\cos x\,(\sqrt{3}\,\cancel{+\sin}\cos x+\sin x)=0$

$2\cos x=0$ или $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0 \quad |\cos x\neq 0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $\sqrt{3}+tg x=0$

$tg x=-\sqrt{3}$

$x=-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

$\left[-4\pi,-\frac{5\pi}{2}\right]$

$-4\pi\le\frac{\pi}{2}+\pi n\le-\frac{5\pi}{2}$ $\qquad$ $-4\pi\le-\frac{\pi}{3}+\pi n\le-\frac{5\pi}{2}$

$-\frac{9\pi}{2}\le\pi n\le-\frac{6\pi}{2}$ $\qquad$ $-\frac{11\pi}{3}\le\pi n\le-\frac{13\pi}{6}$

$-4,5\le n\le-3$ $\qquad$ $-3\frac{2}{3}\le n\le-2\frac{1}{6}$

$n=-4;-3$ $\qquad$ $n=-3;-2$

$x_1=\frac{\pi}{2}-4\pi=\frac{-7\pi}{2}$ $\qquad$ $x_3=-\frac{\pi}{3}-3\pi=-\frac{10\pi}{3}$

$x_2=\frac{\pi}{2}-3\pi=\frac{-5\pi}{2}$ $\qquad$ $x_4=-\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{7\pi}{3}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; $-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

б) $\frac{-7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2};\frac{-10\pi}{3};\frac{-7\pi}{3}$

Пункт а) выполнен верно, в пункте б) допущена ошибка при отборе корней.

**Оценка эксперта**: 1 балл

## ЗАДАЧА № 13 (ПРИМЕР 3)

13) $2\cos^2(-\frac{\pi}{2}-x)+\sqrt{3}\sin 2x=0$

$2\sin^2(x)+\sqrt{3}(2\sin x\cos x)=0$

$2(\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x)=0$

Делим на $\cos^2 x$, $\cos^2 x\neq 0 \Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

$tg^2 x+\sqrt{3}\,tg\,x=0$

$tg\,x(tg\,x+\sqrt{3})=0$

а) $\left[\begin{array}{l} tg\,x=0 \\ tg\,x+\sqrt{3}=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\,x=0 \\ tg\,x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\pi n,\ n\in Z \\ x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.$

б) $x\in[5\pi:2;\ 4\pi] = 3\pi,\ 4\pi,\ \frac{11\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3}$

Ответ: а) $x=\pi n,\ n\in Z$; $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$ б) $3\pi,\ 4\pi,\ \frac{11\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3}$

Тригонометрическое уравнение решено верно, корни из промежутка найдены правильно, но отбор корней не показан.

**Оценка эксперта**: 1 балл.



## ЗАДАЧА № 13 (ПРИМЕР 4)

13

а) $2\cos^2(x-\frac{\pi}{2})-\sqrt{3}\sin 2x=0$

$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x \Rightarrow \cos^2(x-\frac{\pi}{2})=\sin^2 x$

$2\sin^2 x-\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x=0$

$2\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} 2\sin x=0 \Rightarrow x=\pi k,\ k\in Z \\ \sin x-\sqrt{3}\cos x=0 \end{array}\right.$

$\cos(-\frac{\pi}{3})\cdot\sin x-\sin(-\frac{\pi}{3})\cdot\cos x=0$

$\sin(x-\frac{\pi}{3})=0 \Rightarrow x-\frac{\pi}{3}=\pi m,\ m\in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+\pi m,\ m\in Z$

$x=\pi k,\ k\in Z$

б) Проведем отбор с помощью с-ми неравенств

1) $-\frac{5}{2}\pi\le\frac{\pi}{3}+\pi m\le-\pi$

$-15\le 2+6m\le-6$

$-2\frac{1}{3}\le m\le-\frac{4}{3} \Rightarrow m=-2 \Rightarrow x=-1\frac{2}{3}\pi$

2) $-\frac{5}{2}\pi\le\pi k\le-\pi$

$-\frac{5}{2}\le k\le-1 \Rightarrow m=-2,\ m=-1 \Rightarrow x=-2\pi,\ x=-\pi$

Ответ: $x=-1\frac{2}{3}\pi,\ x=-\pi,\ x=-2\pi$

Ответы совпадают с правильными. Но уравнения

$\sin x - \sqrt{3}\,\cos x = 0,$

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin x - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos x = 0$ и $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

не равносильны между собой.

На одном из этапов была допущена ошибка либо в тригонометрии, либо в алгебраических преобразованиях.

**Оценка эксперта**: 0 баллов.

## ЗАДАЧА № 14

В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 8, а боковое ребро *SA* равно 7. На ребрах *AB* и *SB* отмечены точки *M* и *K* соответственно, причём *AM* = 2, *SK* = 1. Плоскость α перпендикулярна плоскости *ABC* и содержит точки *M* и *K*.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку *C*.

б) Найдите площадь сечения пирамиды *SABCD* плоскостью α.

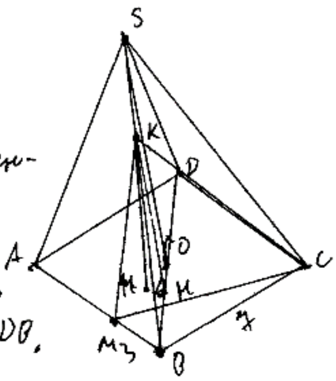
*Типичные ошибки:*

1) неверное («правдоподобное») доказательство пункта а);

2) геометрически необоснованные выкладки в пункте б);

3) вычислительные ошибки.

## ЗАДАЧА № 14 (ПРИМЕР 1)




14. Дано:

$AM = 4 \Rightarrow MB = 3$

$SK = 2 \Rightarrow BK = 3$

Опустим из S перпендикуляр на ABC, а также из точки K.

Обе точки принадлежат диагонали DB.

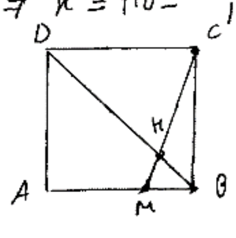
$OB = \frac{7\sqrt{2}}{2}$; найдем HB.:

Рассмотрим плоскость SDB

$\triangle SOB \sim \triangle KHB \Rightarrow \frac{SB}{BK} = \frac{OB}{HB} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{\frac{7\sqrt{2}}{2}}{x} \Rightarrow x = HB = \frac{21\sqrt{2}}{10}$; тогда

$BH = x$

$HD = \frac{49\sqrt{2}}{10}$




Рассмотрим плоскость ABCD:

Докажем, что плоскость α проходит через C.

$\triangle HDC \sim \triangle HMB$ (по двум углам $\angle DHC = \angle MHB$ − верт. $\angle CDB = \angle ABD$ − накрест лежащие)

$\frac{DC}{MB} = \frac{DH}{BH} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{\frac{49\sqrt{2}}{12}}{\frac{21\sqrt{2}}{12}} = \frac{7}{3}$ ч.т.д.

б) Найдем площадь треугольника $MKC$:

$MC = \sqrt{58}$ − по теореме Пифагора; а высоту найдем из подобия $SOB$ и $KHB$: $\frac{SB}{BK} = \frac{SO}{KH}$ $\quad KH = \frac{SO \cdot BK}{BS} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$

$SO = \sqrt{25 - \frac{49 \cdot 2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ − по теореме Пифагора

Найдем площадь $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{10} \cdot \sqrt{58} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{29}}{2 \cdot 10} = \frac{3\sqrt{29}}{10}$

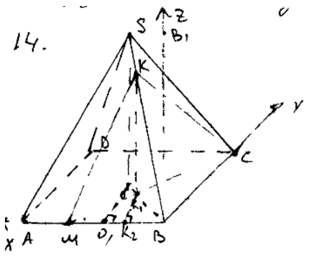
Ответ: $\frac{3\sqrt{29}}{10}$

Решение верное, хотя и содержит неточности. Описание шагов не всегда соответствует их реализации.

**Оценка эксперта**: 2 балла.

## ЗАДАЧА № 14 (ПРИМЕР 2)

14.



Дано: $SABCD$ − прав. пирамида, $AB = 8$, $SA = 7$, $AM = 2$, $SK = 1$, $\alpha \perp (ABC)$, т. $M$ и т. $K \in (ABC)$

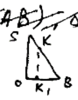
а) Док-ть: т. $C \in \alpha$

Док-во:

1) Рассмотрим $\triangle SOB$ − прямоуг. ($SO$ − высота пирам.) $OB = \frac{DB}{2}$ (св-во диаг. квадрата) $\Rightarrow DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 8\sqrt{2}$ $\Rightarrow OB = 4\sqrt{2}$. $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{17}$

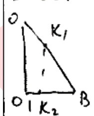
2) Построим т. $K_1$ − проекция т. $K$ на $OB$. $\frac{SB}{SO} = \frac{KB}{KK_1}$; $\frac{7}{\sqrt{17}} = \frac{6}{KK_1} \Rightarrow KK_1 = \frac{6\sqrt{17}}{7}$;

3) Рассм $\triangle SOB$ и $\triangle KK_1B$; $\triangle SOB \sim \triangle KK_1B$ ~~4) Рассм. $\triangle OO_1B$ ($OO_1 \perp AB$) и $\triangle K_1K_2B$ ($K_1K_2 \perp AB$); $\triangle OO_1B \sim \triangle K_1K_2B$~~ $\Rightarrow \frac{SB}{OB} = \frac{KB}{K_1B}$; $\frac{7}{4\sqrt{2}} = \frac{6}{K_1B} \Rightarrow K_1B = \frac{24\sqrt{2}}{7}$



4) Рассм $\triangle OO_1B$ ($OO_1 \perp AB$) и $\triangle K_1K_2B$ ($K_1K_2 \perp AB$); $\triangle OO_1B \sim \triangle K_1K_2B$

$\Rightarrow \frac{OB}{OO_1} = \frac{K_1B}{K_1K_2}$; $\frac{4\sqrt{2}}{4} = \frac{\frac{24\sqrt{2}}{7}}{K_1K_2} \Rightarrow K_1K_2 = \frac{24}{7}$. $\frac{OB}{O_1B} = \frac{K_1B}{K_2B}$; $\frac{4\sqrt{2}}{4} = \frac{\frac{24\sqrt{2}}{7}}{K_2B} \Rightarrow K_2B = \frac{24}{7}$



5) Введем систему координат. т. $B$ − начало. $BA - OX$; $BC - OY$; $BB_1 - OZ$. ($BB_1 = OS$)

допустим $\alpha = (MKK_1)$. Найдем координаты точек

$M(6; 0; 0)$

$K(\frac{24}{7}; \frac{24}{7}; \frac{6\sqrt{17}}{7})$

$K_1(\frac{24}{7}; \frac{24}{7}; 0)$

составим ур. плоск. $(MKK_1)$: $ax + by + cz + d = 0$ т.к. $(MKK_1)$ не проходит через начало коорд. пусть $d = 1$.

$$\begin{cases} M \in \alpha: & 6a + 1 = 0 \\ K \in \alpha: & \frac{24}{7}a + \frac{24}{7}b + \frac{6\sqrt{17}}{7}c + 1 = 0 \\ K_1 \in \alpha: & \frac{24}{7}a + \frac{24}{7}b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{6}x - \frac{1}{8}y + 1 = 0$$

6) чтобы проверить, принадлежит ли т. $C$ плоск. $\alpha$, нужно подставить её координаты в ур-ие плоскости. Если будет верное равенство, то точка принадлежит данной плоскости.

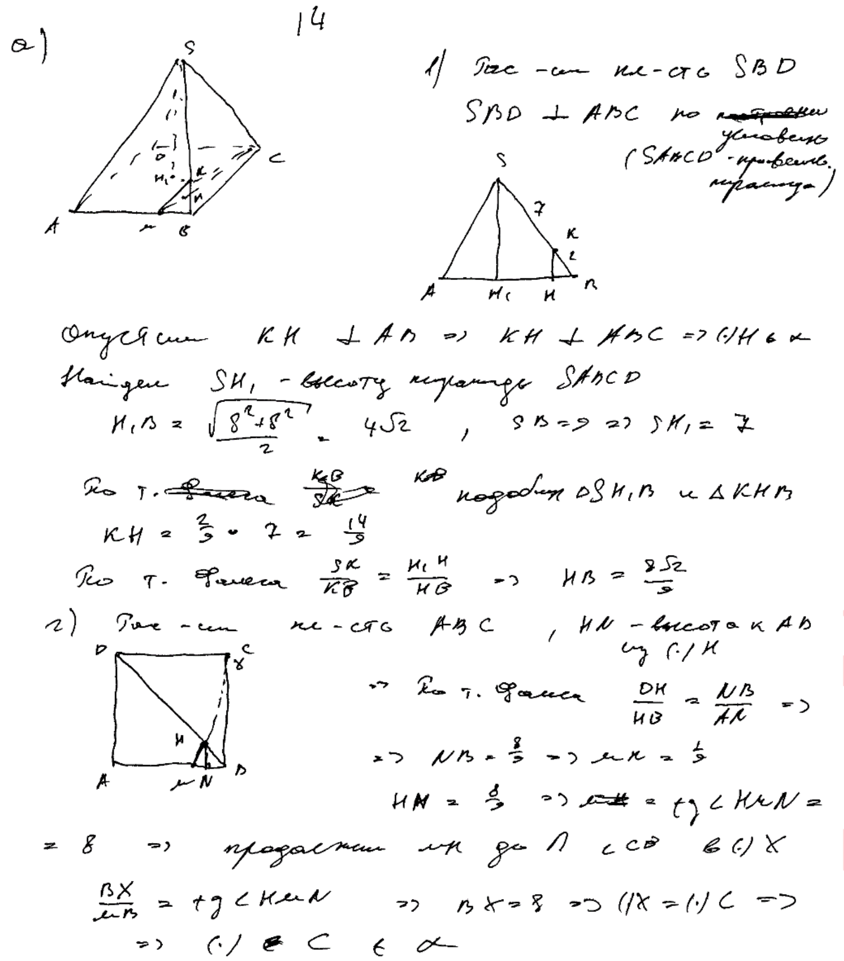
Найдем коорд. т. $C(0; 8; 0)$. подставим в ур. пл. $\alpha$: $-\frac{1}{6} \cdot 0 - \frac{1}{8} \cdot 8 + 1 = 0$

$0 = 0 \Rightarrow$ т. $C \in \alpha$.

Пункт а) не выполнен. Пункт б) решен координатным методом.

**Оценка эксперта**: 1 балл.

## ЗАДАЧА № 14 (ПРИМЕР 3)



14

а)

1) Рассм. пл-сть $SBD$

$SBD \perp ABC$ по ~~построению~~ условию ($SABCD$ - правильн. пирамида)

Опустим $KH \perp AB \Rightarrow KH \perp ABC \Rightarrow (\cdot)H \in \alpha$

Найдем $SH_1$ - высоту пирамиды $SABCD$

$H_1B = \frac{\sqrt{8^2+8^2}}{2} = 4\sqrt{2}$, $SB = 9 \Rightarrow SH_1 = 7$

По т. ~~Фалеса~~ $\cancel{\frac{KB}{SB}}$ $KB$ подобны $\triangle SH_1B$ и $\triangle KHB$

$KH = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3}$

По т. Фалеса $\frac{SK}{KB} = \frac{H_1H}{HB} \Rightarrow HB = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

2) Рассм. пл-сть $ABC$, $HN$ - высота к $AB$ из $(\cdot)H$

$\Rightarrow$ По т. Фалеса $\frac{DH}{HB} = \frac{NB}{AN} \Rightarrow$

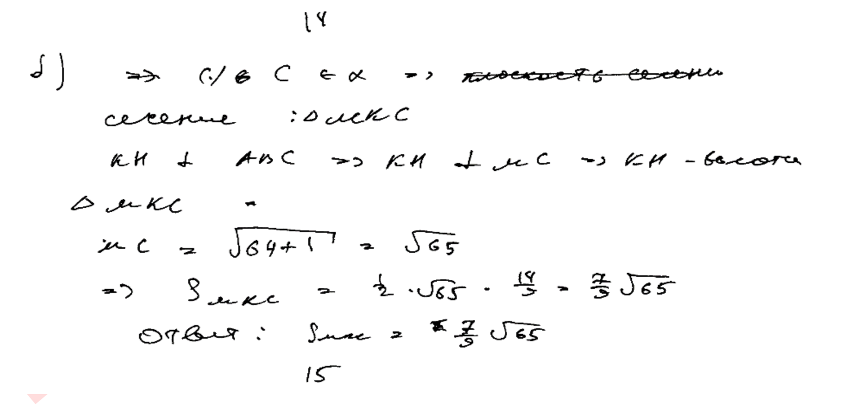
$\Rightarrow NB = \frac{8}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3}$

$HN = \frac{8}{3} \Rightarrow$ ~~...~~ $= tg\angle HMN =$

$= 8 \Rightarrow$ продолжим $MH$ до л. $CD$ в $(\cdot)X$

$\frac{BX}{MB} = tg\angle HMN \Rightarrow BX = 8 \Rightarrow (\cdot)X = (\cdot)C \Rightarrow$

$\Rightarrow (\cdot)C \in \alpha$



14

б) $\Rightarrow (\cdot)C \in \alpha \Rightarrow$ ~~плоскость сечения~~

сечение: $\triangle MKC$

$KH \perp ABC \Rightarrow KH \perp MC \Rightarrow KH$ - высота $\triangle MKC$

$MC = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$

$\Rightarrow S_{MKC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{65} \cdot \frac{14}{3} = \frac{7}{3}\sqrt{65}$

Ответ: $S_{MKC} = \frac{7}{3}\sqrt{65}$

15

Доказательство в пункте а) неверно, содержит геометрические ошибки (к примеру, в формулировке теоремы Фалеса). Пункт б) выполнен.

**Оценка эксперта**: 1 балл.

## ЗАДАЧА № 15

Решите неравенство $x^2 \log_{234}(4-x) \leq \log_3(x^2 - 8x + 16)$.

*Типичные ошибки:*

1) неверное решение квадратного неравенства, составляющего ОДЗ (делался вывод, что *x* – любое);

2) неэквивалентное преобразование неравенства (в частности, сокращение обеих частей на множитель, знак которого зависит от значения *x*);

3) ошибки в расстановке знаков при применении метода интервалов;

4) вычислительные ошибки.

## ЗАДАЧА № 15 (ПРИМЕР 1)

(15) $x^2\cdot\log_{243}(4-x)\le\log_3(x^2-8x+16)$

ОДЗ: $4-x>0$, $x<4$

$x^2\cdot\log_{3^5}(4-x)\le\log_3(4-x)^2$

$\frac{x^2}{5}\log_3(4-x)\le\log_3(4-x)^2$

$\log_3(4-x)^{\frac{x^2}{5}}\le\log_3(4-x)^2$

$(4-x)^{\frac{x^2}{5}}\le(4-x)^2$

$(4-x)^{\frac{x^2}{5}}-(4-x)^2\le 0$

$(4-x)^2\left((4-x)^{\frac{x^2}{5}-2}-1\right)\le 0$

$(4-x)^2=0 \quad x=4$

$(4-x)^{\frac{x^2}{5}-2}-1=0$

$(4-x)^{\frac{x^2}{5}-2}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4-x=1\ (1)\\ \frac{x^2}{5}-2=0\ (2)\end{array}\right.$ $(1)\ x=3$ $(2)\ \frac{x^2}{5}-2=0$ $\frac{x^2}{5}=2$ $x^2=10$ $x=\pm\sqrt{10}$

$+\ \ -\sqrt{10}\ \ -\ \ 3\ \ +\ \ \sqrt{10}\ \ -\ \ 4$

$x\in[-\sqrt{10};3]\cup[\sqrt{10};4)$

Задача сведена к решению неравенства с показательными функциями.

**Оценка эксперта**: 2 балла.

## ЗАДАЧА № 15 (ПРИМЕР 2)

№15

$x^2\cdot\log_{243}(4-x)\le\log_3(x^2-8x+16)$

ОДЗ: $\begin{cases}4-x>0\\ x^2-8x+16>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<4\\ (x-4)^2>0\end{cases}$ $\Rightarrow x<4$

$\log_3 x$ – возраст. функция

$x^2\cdot\log_{3^5}(4-x)\le\log_3((x-4)^2)$

$\frac{x^2}{5}\cdot\log_3(4-x)\le\log_3((x-4)^2)$, $\frac{x^2}{5}\cdot\log_3(4-x)\le\log_3((4-x)^2)$

$\frac{x^2}{5}\cdot\log_3(4-x)\le 2\log_3(|4-x|)$, поскольку по ОДЗ мы знаем, что $x<4$, то $|4-x|$ раскрывается через +

$\frac{x^2}{5}\cdot\log_3(4-x)\le 2\log_3(4-x)$

$\log_3(4-x)\cdot\left(\frac{x^2}{5}-2\right)\le 0$, $\log_3(4-x)(x^2-10)\le 0$

Кри посмотрим нули: 1) $\log_3(4-x)=0 \Rightarrow x=3$

2) $x^2-10=0$ $x^2=10$ $\Rightarrow x=\pm\sqrt{10}$

Метод интервалов и получим, что $x<4$ по ОДЗ:

$+\qquad +$

$-\sqrt{10}\quad 3\quad \sqrt{10}\quad 4\quad x$

Ответ: $x\in(-\infty;-\sqrt{10}]\cup[3;\sqrt{10}]$

Определена область допустимых значений переменной, неравенство эквивалентно преобразовано к более удобному виду для анализа. При применении метода интервалов допущена ошибка в расстановке знаков.

**Оценка эксперта**: 0 баллов.

**ЗАДАЧА № 15 (ПРИМЕР 3)**

№15 $x^2 \log_{243}(4-x) \le \log_3(x^2-8x+16)$

$\frac{x^2}{5}\log_3(4-x) \le \log_3(4-x)^2$

① ОДЗ: $4-x>0$ и $(4-x)^2$ всегда больше нуля, значит
$x<4$ $(4-x)^2 \ne 0$
$x \ne 4$

$\frac{x^2}{5}\log_3(4-x) - \log_3(4-x)^2 \le 0$

$\frac{x^2}{5}\log_3 \frac{\cancel{4-x}}{(4-x)^2} \le 0$

$\frac{x^2}{5}\log_3 \frac{1}{4-x} \le 0$

$\log_3 \frac{1}{4-x} \le \log_3 1$ $\frac{x^2}{5}=0$ (т.к $\frac{x^2}{5}>0$ всегда)

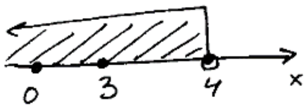
т.к $3>1$, то $x=0$

$\frac{1}{4-x} \le 1$

$\frac{1}{4-x} - 1 \le 0$

$\frac{-3+x}{4-x} \le 0$ *

* $\frac{x-3}{4-x} \le 0$ при $\begin{cases} x-3 \le 0 \\ 4-x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-3 \ge 0 \\ 4-x<0 \end{cases}$ (не ~~соответствует~~ соответствует ОДЗ)

Общее решение  $x \in (-\infty; 4)$



① Ответ $(-\infty; 4)$

Ошибка в преобразовании логарифмов.

**Оценка эксперта**: 0 баллов.

## ЗАДАЧА № 15 (ПРИМЕР 4)

№15

$x^2 \log_{243}(4-x) \le \log_3(x^2-8x+16)$

$x^2 \log_{3^5}(4-x) \le \log_3(x^2-8x+16)$ одно и то же

$\frac{1}{5}x^2 \log_3(4-x) \le \log_3(4-x)^2$

$\log_3(4-x)^{\frac{x^2}{5}} \le \log_3(4-x)^2$

$3>1,\quad (4-x)^{\frac{x^2}{5}} \le (4-x)^2$

$\Downarrow$

2 случая

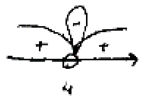
ОДЗ

$\begin{cases} 4-x>0 \\ x^2-8x+16>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<4 \\ x\ne 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x<4}$

$x^2-8x+16>0$

$x^2-8x+16=0$

$\begin{cases} x_1+x_2=8 \\ x_1\cdot x_2=16 \end{cases} \left[ \begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=4 \end{array} \right.$




ОДЗ №1: $\boxed{\begin{array}{l} 4-x>1 \\ \Rightarrow -x>1-4 \\ \Rightarrow x<3 \end{array}}$

$\Downarrow$

$\frac{x^2}{5} \le 2$

$x^2 \le 10$

$x^2-10 \le 0$

$x^2-10=0$

$(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})=0$

$x_1=-\sqrt{10}$

$x_2=\sqrt{10}$


с учётом всех ОДЗ:


$\Rightarrow x \in [-\sqrt{10}; 3)$

ОДЗ №2: $\boxed{\begin{array}{l} 0>4-x>1 \\ -4>-x>-3 \\ 4<x<3 \end{array}}$

$\frac{x^2}{5} \ge 2$

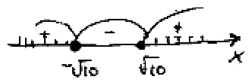
$x^2 \ge 10$

$x^2-10 \ge 0$

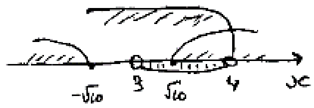
$x^2-10=0$

$x_1=-\sqrt{10}$

$x_2=\sqrt{10}$




с учётом всех ОДЗ




$\Rightarrow x \in [\sqrt{10}; 4)$

Ответ: $x \in [-\sqrt{10}, 3) \cup [\sqrt{10}, 4)$

---

В решении показательного неравенства упущен случай, когда основание степени равно 1. В результате ответ отличается от верного исключением одной точки $x = 3$.

**Оценка эксперта**: 1 балл.

## ЗАДАЧА № 16

На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ отмечены точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 8:3$, $BA_1 : A_1C = 1:2$, $AB_1 : B_1C = 1:3$.
Отрезки $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $D$.

а) Докажите, что четырёхугольник $ADA_1B_1$ – параллелограмм.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, если отрезки $AD$ и $BC$ перпендикулярны, $AC = 16$, $BC = 15$.

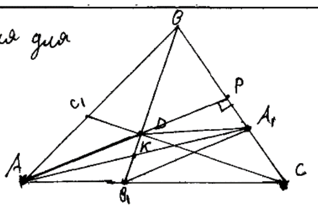
*Типичные ошибки:*

1) необоснованные или неверные геометрические выкладки;
2) вычислительные ошибки.

## ЗАДАЧА № 16 (ПРИМЕР 1)

16.
Дано:
$AC_1 : C_1B = 5:6$
$BA_1 : A_1C = 2:1$
$AB_1 : B_1C = 2:3$
$BB_1 \cap CC_1 = D$

По теореме менелая для $\triangle ABB_1$:




$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{AC} = 1$

$\frac{5}{6} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{3}{5} = 1$

$\frac{BD}{DB_1} = \frac{2}{1} = \frac{A_1B}{A_1C}$ → по теореме о пропорциональных отрезках мы понимаем, что $A_1D \parallel AB_1$.

Пусть $AA_1$ пересекает $BB_1$ в точке $K$. Докажем, что точка $K$ делит $AA_1$ и $DB_1$ пополам.

Применим теорему менелая для $\triangle AA_1C$: $\frac{B_1C}{AB_1} \cdot \frac{AK}{A_1K} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = 1$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{AK}{A_1K} \cdot \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow AK = A_1K$ и для $\triangle BB_1C$: $\frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{BK}{B_1K} \cdot \frac{AB_1}{AC} = 1$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{BK}{B_1K} \cdot \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow \frac{BK}{B_1K} = 5$; Пусть $BD = 2x$, а $B_1D = x$ и $DK = z$ $BK = 2x+z$; $B_1K = x - z$; Подставим: $\frac{2x+z}{x-z} = 5 \Rightarrow 6z = 3x \Rightarrow z = \frac{1}{2}x$, т.е. $DK = \frac{1}{2}B_1D$

$AK = A_1K$ и $DK = KB_1$ – $ADA_1B_1$ – параллелограмм (диагонали парал.-грамма точкой пересечения делятся пополам)

Ч.Т.Д.

б) $AD \perp BC$.
$BC = 21$
$AC = 25$

Применим теорему менелая для $\triangle BB_1C$ и секущей $AD$:
Пусть $AD \cap BC = P$

$\frac{CP}{PB} \cdot \frac{BD}{B_1D} \cdot \frac{AB_1}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{CP}{PB} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{5}{4} \Rightarrow CP = \frac{5 \cdot 21}{9} = \frac{35}{3}$; $PB = \frac{28}{3}$

---

Найдем $AP$ по теореме Пифагора.

$AP = \sqrt{625 - \frac{1225}{9}} = \sqrt{\frac{4400}{9}} = \frac{20\sqrt{11}}{3}$

а также $AB = \sqrt{\frac{4400}{9} + \frac{784}{9}} = \sqrt{\frac{5184}{9}} = 24$.

Воспользуемся формулой, которая связывает радиус описанной около треугольника окружности и его площадь. $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, где $a, b, c$ – стороны треугольника:

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{11}}{3} \cdot 21$, Найдем радиус $R = \frac{21 \cdot 24 \cdot 25}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{11}}{3} \cdot 21} = \frac{24 \cdot 25 \cdot 3}{40\sqrt{11}} =$

$= \frac{45\sqrt{11}}{11}$

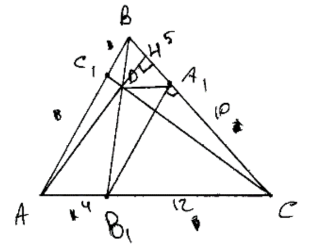
Ответ: б) $\frac{45\sqrt{11}}{11}$

Верно выполнены оба пункта.

**Оценка эксперта**: 3 балла.

## ЗАДАЧА № 16 (ПРИМЕР 2)

№16




Дано:

$\triangle ABC$; $C_1 \in AB$; $A_1 \in BC$;
$B_1 \in AC$

$AC_1 : C_1B = 8:3$; $BA_1 : A_1C = 1:2$

$AB_1 : B_1C = 1:3$

$BB_1 \cap CC_1 = D$

а) Доказать: $ADA_1B_1$ – пар-м

б) $R = ?$; $AC = 16$; $BC = 15$
$AD \perp BC$

б) Решение:

1) $A_1B : A_1C = 1:2 \Rightarrow BA_1 = \frac{1}{2}A_1C$; $BA_1 + A_1C = 15$; $\frac{1}{2}A_1C + A_1C = 15$

$A_1C = 10$; Т.к. $ADA_1B_1$ – пар-м, $\Rightarrow AD \parallel B_1A_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1A_1 \perp BC$;

Пусть $AD \cap BC = H$, $\Rightarrow AH$ – высота

$\triangle AHC \sim \triangle B_1A_1C$ по 2-м равным углам, $\Rightarrow$

$\frac{AH}{B_1A_1} = \frac{CA}{B_1C}$; $AB_1 : B_1C = 1:3 \Rightarrow AB_1 = \frac{1}{3} \cdot B_1C$; $AB_1 + B_1C = 16$

$\Rightarrow \frac{1}{3}B_1C + B_1C = 16$; $B_1C = 12$

$B_1A_1 = \sqrt{144 - 100} = \sqrt{44}$

$\Rightarrow AH = \frac{16 \cdot \sqrt{44}}{12} = \frac{4\sqrt{44}}{3}$

2) $\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH\,BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{44}}{3} \cdot 15 = 10\sqrt{44}$

Также $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle ACB \cdot AC \cdot BC$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin\angle ACB \cdot 16 \cdot 15 = 10\sqrt{44}$

$\Rightarrow \sin\angle ACB = \frac{10\sqrt{44} \cdot 2}{15 \cdot 16} = \frac{20\sqrt{44}}{240} = \frac{\sqrt{44}}{12}$

3) по т. cos:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cos\angle ACB \cdot AC \cdot BC$;

$\cos\angle ACB = \sqrt{1 - \frac{44}{144}} = \sqrt{\frac{100}{144}} = \frac{10}{12}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{225 + 256 - \frac{20}{12} \cdot 15 \cdot 16} = \sqrt{481 - 400} = \sqrt{81} = 9$

4) по т. sin $2R = \frac{AB}{\sin\angle ACB}$; $\cancel{R = \frac{\sqrt{401}}{2 \cdot \frac{\sqrt{44}}{12}} = \frac{2406}{\sqrt{44}}}$

$\cancel{\text{Ответ: } R = \frac{2406}{\sqrt{44}}}$ $\quad \cancel{R = \frac{401 \cdot 12}{2\sqrt{44}}}$ $\quad R = \frac{9}{2 \cdot \frac{\sqrt{44}}{12}}$

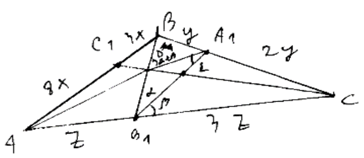
$\cancel{\text{Ответ: } \frac{6\sqrt{401}}{\sqrt{44}}}$ Ответ: $\frac{9 \cdot 6}{\sqrt{44}} = \boxed{\frac{54}{\sqrt{44}}}$

Пункт а) не выполнен, б) решен верно с использованием пункта а).

**Оценка эксперта**: 1 балл.

# ЗАДАЧА № 16 (ПРИМЕР 3)

№16

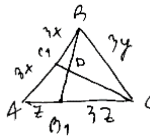



Пусть: $AC_1 = 9x$ $C_1B = 3x$

$BA_1 = y$ $A_1C = 2y$

$AB_1 = z$ $B_1C = 3z$

1) По теореме Менелая найдём в каком отношении бьются $\frac{BD}{DB_1}$ в $\triangle ABB_1$

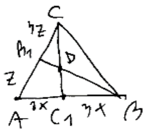



По теореме Менелая: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1$

$\frac{3x}{3x} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{3z}{4z} = 1 \Rightarrow \frac{BD}{DB_1} = \frac{1}{2} = \frac{q}{2q}$

Получается, что отрезок $DA_1$ – паралелен $B_1C$, в $\triangle B_1BC$ точки $D$ и $A_1$ делят отрезки $1:2$ (по теореме Фалеса $DA_1 // B_1C$); значит $DA_1 // AC$.

2) Теперь рассмотрим $\triangle ACC_1$, и узнаем в каком отношении делит точка $D$ отрезок $CC_1$

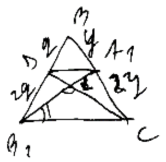



По теореме Менелая: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CD}{DC_1} \cdot \frac{C_1B}{AB} = 1$

$\frac{z}{3z} \cdot \frac{CD}{DC_1} \cdot \frac{3x}{11x} = 1$ $\frac{CD}{DC_1} = 11 \Rightarrow CD = 11p$, $DC_1 = p$

3) Теперь докажем, что $L$ делит $DC$ в таком же отношении, что и $AD$; необходимо найти отношение $\frac{DL}{LC}$ в $\triangle B_1BC$ из подобия $\triangle DLA_1$ и $\triangle B_1LC$ найдём это отношение

см. далее →




мы доказали, что $DA_1 // BC \Rightarrow \angle CB_1A_1 = \angle B_1A_1D$, $\angle DLA_1 = \angle B_1LC \Rightarrow \triangle DA_1L \sim \triangle B_1LA_1$

мы знаем, что $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{2}$, а и $\frac{DB}{DB_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из подобия $\triangle DA_1L$ и $\triangle B_1LC$: $\frac{DA_1}{B_1C} = \frac{1}{3} = \frac{DL}{LC} \Rightarrow$

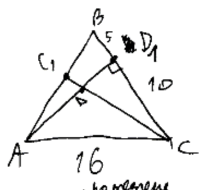
$\Rightarrow$ получаем, что точка $L$ делит $DC$ в отношении $1:3 \Rightarrow$

$B_1L$ в $\triangle ADC$ делит $AC$ в отношении $1:3$ и $DC$ $1:1 \Rightarrow$

$\Rightarrow AD // B_1L$; в итоге имеем, что $AD // B_1A_1$ и $DA_1 // AB_1 \Rightarrow$

$AD // B_1A_1 \Rightarrow ADA_1B_1$ – п/м.

б) $AC = 16$ $BC = 15$ $AD \perp BC$; $R$ – ? вокруг $ABC$




$BD_1 = 5$, $D_1C = 10$

в $\triangle AD_1C$, $\angle AD_1C = 90° \Rightarrow$ по теореме Пифагора $AD_1 = \sqrt{16^2 - 10^2} = \sqrt{6 \cdot 26} = 2 \cdot \sqrt{39}$

в $\triangle ABD_1$, $\angle AD_1B = 90° \Rightarrow AB = \sqrt{25 + 4 \cdot 39} =$ по теореме Пифагора

$= \sqrt{181}$; $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$; $S = S_{\triangle AD_1C} + S_{\triangle ABD_1} = \frac{AD_1 \cdot D_1C}{2} + \frac{BD_1 \cdot AD_1}{2} =$

$= \frac{AD_1}{2}(D_1C + BD_1) = \frac{\sqrt{39} \cdot 2}{2}(10 + 5) = 15\sqrt{39}$

$15\sqrt{39} = \frac{\sqrt{181} \cdot 15 \cdot 16}{4R}$ $R = \frac{4 \cdot \sqrt{181}}{\sqrt{39}}$

ответ: б) $\frac{4 \cdot \sqrt{181}}{\sqrt{39}}$

В пункте а) представлено верное доказательство. В б) геометрическая ошибка: точка $D_1$ пересечения $AD$ и $BC$ полагается совпадающей с точкой $A_1$.

**Оценка эксперта**: 1 балл.

## ЗАДАЧА № 17

В июле 2026 года Иванов планирует взять кредит на пять лет в размере 825 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 825 тыс. рублей;

– выплаты в 2030 и 2031 годах равны;

– к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

*Типичные ошибки:*

1) правильный ответ подобран, проведена проверка, что он удовлетворяет условию, но при этом отсутствует доказательство единственности этого ответа;
2) недостаточная обоснованность решения, часто связанная с использованием специальных экономических формул;
3) ошибки в математической модели;
4) вычислительные ошибки.

## ЗАДАЧА № 17 (ПРИМЕР 1)

1, 2 и 3 выплаты: $825 + 825 \cdot 0{,}2 - x = 825$ тыс $x = 165$ тыс

$825 \cdot 1{,}2 = 990$ тыс

4 и 5 выплаты: ~~825~~ $(990 - x)1{,}2 - x = 0$ *

$x = \frac{1188}{2{,}2} = 540$ тыс

вся сумма: $165 \cdot 3 + 540 \cdot 2 = 1575$ тыс.

Ответ: 1575 тыс.

Краткое, но верное решение представлено в Примере 1.

**Оценка эксперта**: 3 балла.

## ЗАДАЧА № 17 (ПРИМЕР 2)

| 2026 | ян | фев | мар | апр | май | июль | июнь | авг | сен | окт | ноя | дек |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2027 | +30% | | 345 | | | | | | | | | |
| 2028 | +30% | | 345 | | | | | | | | | |
| 2029 | +30% | | 345 | | | | | | | | | |
| 2030 | +30% | | 845 | | | | | | | | | |
| 2031 | +30% | | 845 | | | | | | | | | |

1150 руб

1495 руб

$\frac{1150}{100} = \frac{x}{30}$; $x = \frac{115\cancel{0} \cdot 3\cancel{0}}{1\cancel{00}}$; $x = 345$

$1495 - 845 = 650$

$x = \frac{65\cancel{0} \cdot 3\cancel{0}}{100}$; $x = 65 \cdot 3 = 195$

$650 + 195 = 845$

$345 \cdot 3 + 845 \cdot 2 = 2725$ (руб)

Ответ: 2725 руб.

В Примере 2 мы сталкиваемся как раз с ошибкой первого рода. Выплаты за первые 3 года найдены обоснованно, способ нахождения выплаты в 2030 и 2031 годах не описан.

**Оценка эксперта**: 0 баллов.

## ЗАДАЧА № 17 (ПРИМЕР 3)

№17 $x_n$ - выплаты каждого года

$S_0 = 825$ тыс руб

$r = 20\%$

Т.к первые 3 год $S_0$ не менялась, то Иванов платил только %. т.е

$$X_1 = X_2 = X_3 = 825 \cdot \frac{20}{100} = 825 \cdot 0{,}2 = 165 \text{ тыс руб.}$$

За след 2 года Иванов равными суммами выплатил весь кредит. Составим ур-ие на 2 года, где $S$ - конечная сумма $= 0$, а $n = 2$ - кол-во лет, а $k = 1 + \frac{r}{100}$ коэф. увел

$$(S_0 \cdot k - X_4) k - X_5 = S$$

Решим по формуле сложного % $S = S_0 k^n - x \frac{k^n - 1}{k - 1}$

$$0 = 825 \cdot 1{,}2^2 - x \frac{1{,}2^2 - 1}{1{,}2 - 1}$$

$$x \frac{\cancel{(1{,}2-1)}(1{,}2+1)}{\cancel{(1{,}2-1)}} = 825 \cdot 1{,}44$$

$$2{,}2x = 825 \cdot 1{,}44$$

$$x = \frac{825 \cdot 1{,}44}{2{,}2} = \frac{1188}{2{,}2} = 540 \text{ тыс руб} = X_4 = X_5$$

$S_{вып} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 165$ тыс руб $\cdot 3 + 540$ тыс руб $\cdot 2 =$
$= 495 + 1080 = 1575$ тыс руб

Ответ: 1575 тыс руб

Решение задачи опирается на формулу сложных процентов. Такие решения принято считать недостаточно обоснованными.

**Оценка эксперта**: 2 балла.

## ЗАДАЧА № 17 (ПРИМЕР 4)

17)

Общая сумма 825 тыс. руб.

Так как в 2027, 2028 и 2029 году банк начислял 20% каждый год и Иванов выплачивал х сумму. Но кредит остался 825 тыс. руб =>

Иванов в 2027, 2028 и 2029 году, каждый год выплачивал ровно столько, сколько процентов начислял банк

20% от 825 тыс = 165 тыс.

в 2027 г - выплатил 165 т.р.
в 2028 г - выплатил 165 т.р
в 2029 г - выплатил 165 т.р.
в 2030 г - $825 + 165 - y$
в 2031 г - $(825 + 165 - y) + 165 - y = 0$

$$825 + 165 - y + 165 - y = 0$$
$$-2y = -825 - 330$$
$$2y = 1155$$
$y = 577{,}5$ тыс. руб выплачивал иванов в 2030 и 2031 г

Общая сумма выплат равна $= 577{,}5 + 577{,}5 + 165 + 165 + 165 = 1155 + 495 = 1650$ тыс. руб

Ответ: Иванов ви за пять лет выплатил банку: 1650000 рублей

В Примере 3 обучающийся составляет математическую модель с ошибкой: в 2031 году процент начислен только на часть долга: 165 вместо $165 + (165 - y) \cdot 0{,}2$.

**Оценка эксперта**: 0 баллов.

## ЗАДАЧА № 18

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(16 - y^2) = \log_3(16 - a^2x^2) \\ x^2 + y^2 = 8x + 4y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

*Типичные ошибки:*

1) при решении задачи графическим или аналитическим методом рассматриваются не все возможные случаи;

2) при реализации графического метода уравнения касательных к окружности определяются с ошибкой, наугад, что приводит к неверному решению задачи.

## ЗАДАЧА № 18 (ПРИМЕР 1)

№18 $a$ - ? 2 решения

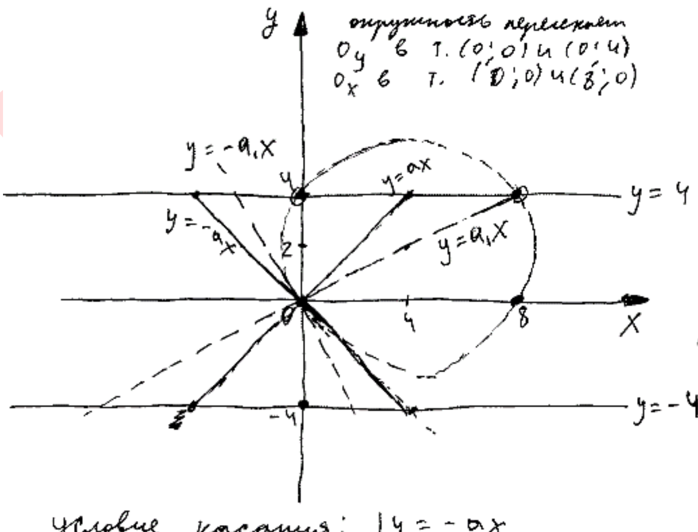
$$\begin{cases} \log_3(16-y^2) = \log_3(16-a^2x^2) \\ x^2+y^2 = 8x+4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-y^2>0 \\ 16-a^2x^2>0 \\ 16-y^2 = 16-a^2x^2 \\ x^2-8x+y^2-4y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4<y<4 \\ -4<ax<4 \\ y^2-a^2x^2=0 \quad (3) \\ (x-4)^2+(y-2)^2=20 \, (4) \end{cases}$$

(3) $(y-ax)(y+ax)=0$ - это 2 прямые $y=ax$
$y=-ax$

продолжение см. на след. листе

№18 (продолжение) нарисуем графики функций, которые у нас есть в системе




найдем $a$, при котором прямая $y=-ax$ касается окружности

и $a_1$, при котором пересекаются прямые $y=4$, окружность (4) и $y=a_1x$

условие касания: $\begin{cases} y=-ax \\ x^2-8x+y^2-4y=0 \end{cases}$ (4) (5) имеют 1 общий корень

подставим (5) в (4) $y=-ax$: $x^2-8x+a^2x^2+4ax=0$

№ 18 (продолжение)

подставляя в (4) $y=-ax$ : $x^2-8x+a^2x^2+4ax=0$

$x^2(a^2+1)-x(8-4a)=0$

$x(x(a^2+1)-8+4a)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{8-4a}{a^2+1}\end{array}\right. \Rightarrow 8-4a_k=0 \Rightarrow a=2$ ($a_{k_1}$ – $a$ касания)

найдем $a_1$: $y=4$ пересекает (4) в т. $(8;4)$

$\Rightarrow y=a_1x$; $4=a_1\cdot 8$; $a_1=\frac{1}{2}$

$a_1<a_{k_1}$ $\Rightarrow$ при положительных $a$ система будет иметь 3 решения при $a\in(0;a_1)$, то есть при $a\in(0;\frac{1}{2})$

при $a=0$ система будет иметь 2 решения

при $a=\frac{1}{2}$ система будет иметь 2 решения

при $a\in(\frac{1}{2};2)$ система будет иметь 2 решения

при $a=2$ система будет иметь 1 решение

$a\in(2;+\infty)$ – 2 решения

Заметим, что при замене $a$ на $-a$ прямые $y=ax$ и $y=-ax$ меняются местами, поэтому при $a<0$ все промежутки будут такими же, только с противоположным знаком

$\Rightarrow$ 2 решения при $a\in(-\infty;-2)\cup(-2;-\frac{1}{2}]\cup\{0\}\cup[\frac{1}{2};2)\cup(2;+\infty)$

Ответ: $a\in(-\infty;-2)\cup(-2;-\frac{1}{2}]\cup\{0\}\cup[\frac{1}{2};2)\cup(2;+\infty)$

Задача решена верно.

**Оценка эксперта**:

4 балла.

## ЗАДАЧА № 18 (ПРИМЕР 2)

18. $\begin{cases}\log_5(16-y^2)=\log_5(16-a^2x^2) \\ x^2+y^2=6x+4y\end{cases}$, два решения $\Rightarrow$ преобразуем $\Rightarrow$ $\begin{cases}16-y^2>0 \\ y^2=a^2x^2 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}16-y^2>0 \\ (y-ax)(y+ax)=0 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=13\end{cases}$

$\begin{cases} y\in(-4;4) \\ \left[\begin{array}{l} y=ax \\ y=-ax\end{array}\right. \\ (x-3)^2+(y-2)^2=13\end{cases}$

1) Пусть $a=0$, тогда $y=0$, а $x=0$ и $x=6$, такое значение $a$ нас устраивает;

2) Пусть $a\neq0$, тогда

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x=\frac{y}{a} \quad (1) \\ x=-\frac{y}{a} \quad (2)\end{array}\right. \\ (x-3)^2+(y-2)^2=13 \quad (3) \\ y\in(-4;4)\end{cases}$

2.1) подставим уравнение (1) в уравнение (3)

$(\frac{y}{a}-3)^2+(y-2)^2=13$

$\frac{y^2}{a^2}-6y\cdot\frac{1}{a}-4y+y^2=0 \;/\cdot a^2$

$y^2-6ya-4ya^2+y^2a^2=0$

$y(y-6a-4a^2+ya^2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y(a^2+1)=6a+4a^2 \; (2.1)\end{array}\right.$

мы знаем, что при $y=0$ есть два решения, следовательно при $y$ (2.1) решений быть не должно:

$y=\frac{6a+4a^2}{1+a^2} \Rightarrow \left|\frac{6a+4a^2}{1+a^2}\right|\geq4 \Rightarrow |6a+4a^2|\geq4+4a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 6a+4a^2\geq4+4a^2 \\ -(6a+4a^2)\geq4+4a^2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\geq\frac{2}{3} \\ 8a^2+6a+4\leq0\end{array}\right.$ $D<0$ $a\in\varnothing$ $\Rightarrow a\geq\frac{2}{3}$

2.2. $x=-\frac{y}{a}$; $(\frac{y}{a}+3)^2+(y-2)^2=13$

$\frac{y^2}{a^2}+6\frac{y}{a}+y^2-4y=0 \;/\cdot a^2$

$y^2+6ya+y^2a^2-4a^2y=0$

$y(y+6a+ya^2-4a^2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \quad \text{(два решения)} \\ y=\frac{4a^2-6a}{a^2+1} \quad \text{(не подходит) } \end{array}\right.$

$\left|\frac{4a^2-6a}{a^2+1}\right|\geq4 \Rightarrow |4a^2-6a|\geq4a^2+4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4a^2-6a\geq4a^2+4 \\ -4a^2+6a\geq4a^2+4\end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\leq-\frac{2}{3} \\ 8a^2-6a+4\leq0 \; (a\in\varnothing\end{array}\right. \Rightarrow a\leq-\frac{2}{3}$

Проанализируем все исходные данные и получим ответ:

Ответ: $a\in(-\infty,-\frac{2}{3}]\cup\{0\}\cup[\frac{2}{3};+\infty)$

Не рассмотрен случай совпадения решений.

**Оценка эксперта**: 2 балла.

## ЗАДАЧА № 18 (ПРИМЕР 3)

№18

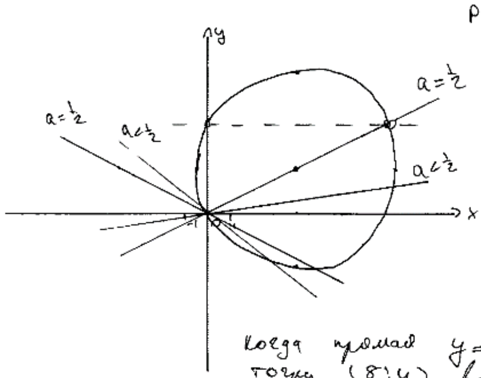
$$\begin{cases} \log_3(16-y^2)=\log_3(16-a^2x^2) & (1) \\ x^2+y^2=8x+4y & (2) \end{cases}$$ — ровно 2 решения

(1) $\begin{cases} 16-y^2=16-a^2x^2 \\ 16-y^2>0 \\ 16-a^2x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-ax)(y+ax)=0 \\ -4<y<4 \\ -4<ax<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=ax \\ y=-ax \end{array}\right. \\ -4<y<4 \\ -4<ax<4 \end{cases}$

(2) $x^2+y^2=8x+4y$;

$x^2-8x+16-16+y^2-4y+4-4=0$

$(x-4)^2+(y-2)^2=20$ — ур-ие окружности с центром в т. $(4;2)$ и радиусом $\sqrt{20}$




$\begin{cases} y=ax \\ y=-ax \end{cases}$ — система двух прямых, которые проходят через точку $(0;0)$

$\Rightarrow$ при любом $a$ всегда будет решение $x=0$, $y=0$

Когда прямая $y=ax$ проходит через точку $(8;4)$ всего 2 решения

при $a=1$ ~~при~~ $y=-x$ – касательная, $\Rightarrow$ всего одно решение

при $a=0$ прямая $y=0$ пересекает окр в 2-х точках: $x=0$ и $x=8$ $\Rightarrow$ 2 решения

при ~~при~~ $0<a<\frac{1}{2}$ более 2-х точек пересечения

при $\begin{cases} a\geq\frac{1}{2} \\ a<1 \end{cases}$ 2 точки пересечения: $x=0$, а также когда прямая $y=-ax$ пересекает окр. в IV четверти

при $a>1$ 2 точки пересечения: $x=0$, а также когда прямая $y=-ax$ пересекает окр во II четверти

Ответ. $a\in\{0\}\cup[\frac{1}{2};1)\cup(1;+\infty)$

Задача сведена к рассмотрению взаимного расположения прямых и окружности. При дальнейшем исследовании обучающийся неверно определяет уравнения касательных.

**Оценка эксперта**: 1 балл.

## ЗАДАЧА № 18 (ПРИМЕР 4)

№18

$\begin{cases} \log_5(16-y^2)=\log_5(16-a^2x^2) \\ x^2+y^2-6x-4y=0 \end{cases}$, ОДЗ: $\begin{cases} 16-y^2>0 \\ 16-a^2x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\in(-4;4) \\ x\in(-\frac{4}{a};\frac{4}{a}) \\ a\neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 16 - y^2 = 16 - a^2x^2 \\ (x^2-6x+9)-9+(y^2+4y+4)-4=0 \\ ОДЗ \end{cases} \Leftrightarrow$$

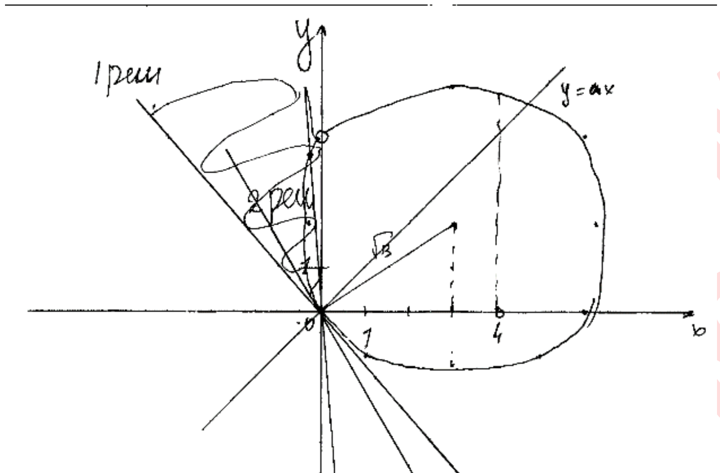
$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = a^2x^2 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=13 \\ ОДЗ \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=ax \text{ – пучок пр., прохо}д\ (0;0) \\ (x-3)^2+(y+2)^2=13 \text{ – окр с центром } O(3;2) \text{ и } R=\sqrt{13} \end{cases} \quad A \\ \begin{cases} y=-ax \\ (x-3)^2+(y-2)^2=13 \end{cases} \quad B \\ ОДЗ\text{: } y\in(-4;4) \end{array}\right.$$

$$a \neq 0$$

$$x \in \left(-\frac{4}{a};\ \frac{4}{a}\right)$$

Чтобы решить параметр начертим графики. Окр и пр. имеют ровно 2 разл решения, когда прямая пересекает окр.

Из графика понимаем, что в системе A решений нет, т.к 2 реш. не удовл. ОДЗ




Ответ:
$\forall a \in (1;0)\cup(0;+\infty)$

Ошибка в определении ОДЗ переменной.

**Оценка эксперта**: 0 баллов.

**ЗАДАЧА № 19**

На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 1, к каждому числу из второй группы — цифру 8, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 4 раза?

б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 18 раз?

в) Сумма всех этих чисел увеличилась в 11 раз. Какое наибольшее количество чисел могло быть написано на доске?

*Типичные ошибки:*

1) в пункте а) используются одинаковые числа;

2) отсутствие обоснования единственности ответа в пункте б);

3) отсутствие оценки, подтверждающей пример, в пункте в).

## ЗАДАЧА № 19 (ПРИМЕР 1)

№ 19

n чисел (разных) → 3 группы:
I. справа добавляется цифра 1
II справа добавляется цифра 8
III · число неизменны

а) Если изначально будут числа 1, 2 и 9 и они будут помещены в I, II и III группу соответственно, то утверждение верно (сумма увеличится в 4 раза)

$1 + 2 + 9 = 12$
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
$11 \quad 28 \quad 9 = 48$

$48/12 = 4$

Ответ. Да, можно

б) В I группе число может максимально увеличиться в 11 раз, во II группе – в 18 раз, а в III оно неизменно. Т.к. во всех группах должны быть числа, значит $S' < 18S$

Ответ: Нет, нельзя

---

в) $S'$ должна быть кратна 11. Большинство чисел должны быть во II группе. Минимальная потеря для I и III колонок

I $2 \to 21\ (1)$ – т.к. должно быть 22

III $1 \to 1\ (10)$ – т.к. должно быть 11

Возможные числа для II группы их запасы/потери в кратности 11:

| +5 | +4 | +3 | +2 | +1 | 0 | −1 | −2 | −3 | −4 | −5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 48 | 58 | 68 | 78 | 88 | 98 | 108 | 118 | 128 | 138 |

Числа 38; 48 и 68 восполнят потерю остатков в I и III группе.
Число 88 само по себе кратно 11
Числа 58 и 118, 78 и 98 попарно будут кратны 11.

Итого: 1 число в I группе, 1 число в III группе и 8 чисел во II группе

Ответ. 10

Ответ: а) Да, могла; б) Нет, не могла; в) 10

Пункт а) выполнен верно. Утверждения пункта б) правдоподобны, но не обоснованы. В в) получен пример без оценки.

**Оценка эксперта**: 1 балл.

**ЗАДАЧА № 19 (ПРИМЕР 2)**

№19

а) Да, могла. Например, в первой группе 0, во второй 1, в третьей 4. Сумма этих чисел равна 5. После преобразований получим 2 в первой группе, 19 во второй, 4 в третьей. Сумма этих чисел равна 25. Сумма увеличилась в 5 раз

Ответ: а) да.

При построении примера использовался 0, число, не являющееся натуральным.

**Оценка эксперта**: 0 баллов.

**ЗАДАЧА № 19 (ПРИМЕР 3)**

19. ~~а) да, могла~~

~~б) не могло~~

возьмём за а и в кол-во чисел в первой и второй группе соответственно, а за $S_1, S_2, S_3$ – суммы чисел в каждой из этих групп √ см. далее

тогда изначально сумма будет составлять $S_1+S_2+S_3$, а после изменений – $10S_1+10S_2+S_3+a+b$.

а) да, могла, т.к. $4(S_1+S_2+S_3)=10S_1+10S_2+S_3+a+8b$

при количестве и сумме чисел в первых 2-х группах равных 1, а сумме чисел в 3-й группе равной 7: $4+4+28=10+10+7+1+8$

б) нет, не могло; т.к. для этого должно выполняться уравнение:

$18(S_1+S_2+S_3)=10S_1+10S_2+S_3+a+8b$

$8S_1+8S_2+17S_3=a+8b$ – невозможно при натуральных $S_1, S_2, S_3, a, b$, т.к. при сумме чисел равной кол-ву чисел, (т.е. минимально возможной при натуральных числах) ~~$a=S_1, b=S_2$~~ a будет равно $S_1$, а $b$ – $S_2$, получаем:

$8a_1+8b_2+17S_3=a+8b$, что невозможно при $a, b, S_3 \geq 0$

Выполнены пункты а) и б), хотя в пункте а) пример приведен в неявном виде. **Оценка эксперта**: 2 балла.

**Причины получения характерных ошибок**

При подготовке к ЕГЭ по математике используются приемы избыточной алгоритмизации в поиске решения задачи. При незначительном изменении математической модели условия происходит дезориентация обучающегося, который не в состоянии адаптировать используемые им ранее методы решения.

**Пути устранения ошибок**

Для подготовки к ЕГЭ по математике нужно обязательно знакомить обучающихся с типовыми заданиями, вариантами прошлых лет, выделять общие методы и подходы к решению. Но эта специализированная работа не должна исключить и заменить обучение математике и логике в целом, необходимо избегать рецептурного подхода в обучении.

### 3.3. Выводы об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий

**Элементы содержания, усвоение которых всеми школьниками региона в целом можно считать достаточным / недостаточным**

Как уже отмечалось выше, по всем элементам содержания наблюдается тенденция: задачи соответствующего элемента базового уровня выполняются более-менее успешно, с повышением уровня сложности процент выполнения катастрофически падает. При выполнении заданий с развернутым ответом встречаются грубые математические и логические ошибки как в геометрии, так и в алгебре (связанные с тождественными преобразованиями алгебраических выражений, эквивалентными преобразованиями уравнений и неравенств, анализом функций и т. д.).

Коды элементов содержания, усвоение которых не является достаточным (согласно результатам выполнения ЕГЭ-2020 по математике):

- Алгебра (тригонометрия – 1.2, логарифмы – 1.3, преобразование выражений – 1.4);
- Уравнения и неравенства (особенно надо выделить тригонометрические уравнения – 2.1.4, показательные уравнения – 2.1.5, логарифмические уравнения – 2.1.6);
- Геометрия (к особо проблемным зонам в планиметрии относится геометрия окружностей – 5.1.4, 5.1.5, в стереометрии результаты ЕГЭ 2020 года выявляют традиционные трудности с такими разделами, как прямые и плоскости в пространстве – 5.2, многогранники – 5.3, измерение геометрических величин – 5.4);
- Начала математического анализа (производная – 4.1, исследование функций – 4.2).
- Функции (элементарное исследование функций – 3.2).

### Умения и виды деятельности, усвоение которых всеми школьниками региона в целом можно считать достаточным / недостаточным

То же самое касается видов деятельности. Однако все же более успешно школьники выполняли задания на применение приобретенных знаний и умений в повседневной жизни. Среди задач повышенного уровня сложности задание этого типа № 17 имеет самый высокий процент выполнения.

### Изменения успешности выполнения заданий разных лет по одной теме

Незначительное ухудшение показателей имеет место по геометрии. Сравнительная статистика представлена в таблице ниже.

*Таблица 12*

Сравнительная статистика выполнения заданий по элементу содержания «Геометрия»

| | **Процент выполнения заданий «Геометрия»** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Год** | № 3 | № 6 | № 8 | № 14 | № 16 |
| 2019 | 97 | 75 | 69 | 3 | 1,2 |
| 2020 | 87 | 82 | 30 | 1,4 | 0,6 |

То же самое касается элемента содержания «Уравнения и неравенства»:

*Таблица 13*

Сравнительная статистика выполнения заданий по элементу содержания «Уравнения и неравенства»

| | **Процент выполнения заданий «Уравнения и неравенства»** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Год** | № 5 | № 11 | № 13 | № 15 | № 18 |
| 2019 | 91, | 63 | 26 | 10 | 2 |
| 2020 | 95 | 54 | 14 | 5 | 1 |

По остальным элементам содержания качественных отличий нет.

**Существенных изменений в содержании КИМ ЕГЭ по математике в 2020 году в сравнении с 2019 годом не было.**

Также существенных изменений не наблюдается и в результатах ЕГЭ по математике в Иркутской области в течение последних трёх лет. Они не становятся значительно лучше, но и не ухудшаются. Это было бы невозможно, на наш взгляд, без использования рекомендаций для системы образования субъекта Российской Федерации, включенных с статистико-аналитический отчет результатов ЕГЭ в 2019 году.

## 4. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ

Как и прежде, советуем обратить внимание на открытые банки заданий ЕГЭ по математике (см. информацию на сайтах http://www.mathege.ru/, http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege, https://vpr.statgrad.org/). Их главная цель — дать представление о том, какие задания будут в вариантах единого государственного экзамена по математике, и помочь выпускникам сориентироваться при подготовке к экзамену. Задания открытого банка помогут будущим выпускникам повторить (освоить) школьный курс математики, найти в своих знаниях слабые места и ликвидировать их до экзамена. Среди заданий 1–12 есть аналогичные экзаменационным (отличия – только в числовых параметрах), кроме них, на каждой позиции представлены задания и проще, и посложнее «реальных». По каждому из заданий 1–12 есть полный набор типовых задач, и мы настоятельно рекомендуем их решать в течение учебного года. Открытый банк заданий ЕГЭ по математике http://www.mathege.ru/ содержит также значительное количество тренировочных и диагностических работ прошлых лет; ко всем заданиям с кратким ответом этих работ даны ответы, а ко всем заданиям с развернутым ответом – ответы и решения.

При подготовке к заданиям с кратким ответом выпускникам могут сильно помочь тренажёры. Этим не надо пренебрегать. Поставьте обязательным условием, хотя бы один раз, а лучше два или три раза в неделю, решать какой-нибудь вариант (задания 1–12), и смотреть свои результаты с точки зрения анализа своих ошибок. Чтобы был успех, надо по каждой задаче добиться 100-процентного результата. Нельзя, чтобы 99 раз получилось, а 1 раз нет. Потому что вдруг такое же случится на самом экзамене. Там уже права на ошибку не будет. Поэтому чем больше вариантов выпускник решает при подготовке, тем больше своих ошибок сделает, тем меньше будет шансов сделать их же на экзамене.

При подготовке к заданиям с развёрнутым ответом (задания 13–19) возникает очень сильная необходимость в правильной работе учителя. Ведь только учитель может научить детей логически обосновывать, правильно записывать решение… Ни один тренажёр этому не учит. На просторах интернета уже давно появились различные онлайн-курсы по подготовке к ЕГЭ. Но помните, что прослушать видеоуроки в виде лекций – это очень мало для успешной сдачи экзамена. Нужно получить опыт в решении задач.

При записи решений важно: не писать лишнего, не придумывать ничего нового (каких-то своих обозначений). Есть вполне четкий математический язык. Им и нужно пользоваться.

Невозможно претендовать на высокий экзаменационный балл, не решив задания, расположенные в вариантах экзамена на последних позициях. Эти задания носят явно выраженный нестандартный характер, тем они и отличаются от остальных задач ЕГЭ. Сведения, необходимые для решения этих задач, могут относиться к самым различным разделам школьного курса, построение решения может потребовать нетривиальных идей и методов. Ведь смыслом включения этих заданий в состав контрольно-измерительных материалов ЕГЭ является диагностика именно уровня интеллектуального развития учащихся. Чем раньше начать развивать свое математическое мышление, тем выше может быть результат. Этому хорошо способствуют занятия олимпиадной математикой начиная с начальной школы.

Выпускникам и учителям Иркутской области можем порекомендовать также задания профильного ЕГЭ, регулярно подготавливаемые и размещаемыми РПК Иркутской области по математике в течение учебного года на открытом облачном диске, доступном по адресу:

https://drive.google.com/drive/u/0/folders/1RzQyy9P8e04SoXtZI9aPop2lXe01gc0D.

Учителям-предметникам и для обсуждения на методических объединениях учителей-предметников мы рекомендуем:

- не подменять системное обучение математике на уроках формальной подготовкой к ЕГЭ. Не забывать, что ЕГЭ представляет собой лишь **форму** объективной **оценки качества** подготовки лиц, **освоивших образовательные программы** среднего общего образования. Надо помогать учащимся освоить предмет, а не «натаскивать» на решение типичных задач;
- знакомить учащихся с критериями оценивания заданий части с развернутым ответом с использованием размещённых на сайте ФИПИ «Методических рекомендаций для экспертов ПК»; обращать внимание учащихся на характерные ошибки участников экзамена с привлечением сканов работ прошлых лет.

Выпускникам 2021 года мы рекомендуем:

- Решайте задания в черновике в любом удобном для Вас порядке. Всегда держите в голове, что в любом задании с кратким ответом ответ существует, единственен и является целым числом либо конечной десятичной дробью. Размерность, градусы, проценты и т. п. указывать не нужно. Перед тем как записать ответ, ещё раз внимательно прочтите текст задания (ту ли задачу Вы решали? ту ли величину Вы пишете в ответ?). Не забывайте выполнить проверку найденного решения! Аккуратно и правильно заполняйте бланк заданий с кратким ответом

- При выполнении заданий внимательнее читайте условие. Помните, что решение с другими числовыми данными оценивается в 0 баллов. Не тратьте время на переписывание заданий из КИМ. Поставьте только номер и запишите решение и ответ. При выполнении заданий с развернутым ответом переключайтесь на 10-15 минут для проверки условий и решений (ответов) заданий с кратким ответом.
- Если условие задания содержит несколько пунктов а), б), в), то и решение задания должно содержать эти же пункты.
- При выполнении задания 13 начните с ОДЗ. Особенно внимательно решайте квадратные и простейшие тригонометрические уравнения (любая ошибка в формулах для их решения не позволит Вам набрать даже 1 балл!). Нарисуйте единичную окружность и пользуйтесь ею при решении простейших тригонометрических уравнений и неравенств. При отборе корней в пункте б) проведите необходимые оценки в форме неравенств (никаких «приблизительно равно»!). Имейте в виду, что в заданиях 13 ЕГЭ-2019 вместо квадратно-тригонометрических уравнений могут быть логарифмические, показательные, иррациональные и другие типы уравнений.
- При выполнении задания 14 не тратьте время на слишком подробные обоснования. Однако помните, что для получения хотя бы 1 балла за эту задачу Вы должны правильно выполнить геометрию задачи (с набором необходимых обоснований!) и указать способ вычисления искомой величины. Наличие геометрической ошибки или отсутствие необходимых геометрических обоснований в решении задания 14 не позволит Вам набрать хотя бы 1 балл.
- При выполнении задания 15 начните с записи всех условий, составляющих ОДЗ. Обосновывайте равносильность проводимых преобразований. Незнание (непонимание!) свойств логарифмов резко уменьшает Ваши шансы на получение по этому заданию хотя бы одного балла. При решении рациональных неравенств используйте по возможности метод интервалов. Не забывайте записывать (изображать на числовой прямой) найденную ОДЗ, а также найденные решения промежуточных и исходного неравенств.
- При выполнении задания 16 постарайтесь, прежде всего, дать обоснованное доказательство утверждения в пункте а) (отсутствие или неполнота этого доказательства не позволит Вам получить за задание 16 более 1 балла!).

- При выполнении задания 17 внимательно читайте условие задания и не торопитесь с выкладками, пока не построите верную математическую модель задачи. Проверяйте свои числовые выкладки. Выполняйте их так, как будто это расчёты с лично Вашими денежными средствами. Помните об обязательности построения математической модели задачи.
- При выполнении задания 18 используйте графические соображения и формальную логику. Не забывайте проверять найденные значения параметра.
- Не бойтесь приступать к решению задания 19; оно, как правило, не требует от Вас никаких особых знаний по математике. Внимательно читайте условие и постарайтесь хотя бы: 1) понять содержание вопросов в каждом из пунктов задания и 2) подобрать (и проверить!) искомые величины.
- Используйте на выполнение работы всё отведённое время. Периодически проверяйте сделанное в части 1 и в части 2.

## 5. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. ЕГЭ 2020. Математика. 4000 задач с ответами. Базовый и профильный уровни. «Закрытый сегмент» / И. В. Ященко и др. – М. : Экзамен, 2020.
2. ЕГЭ 2017. Математика. 3300 задач с ответами. Профильный уровень. «Закрытый сегмент». Задания 1-12. / И. В. Ященко и др. – М. : Экзамен, 2017.
3. Волкевич М. А. Подготовка к ЕГЭ 2018 по математике. Диагностические работы. Профильный уровень / М. А. Волкевич, И. Р. Высоцкий и др. ФГОС– М. : МЦНМО, 2018.
4. Вольфсон Г. И., Пратусевич М. Я., Рукшин С. Е., ЕГЭ 2020. Математика. Задача 19 (профильный уровень). Арифметика и алгебра. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
5. Высоцкий И. Р., Ященко И. В. ЕГЭ 2020. Математика. Теория вероятностей. Задача 4 (профильный уровень). Задача 10 (базовый уровень) Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
6. Высоцкий И. Р. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи на наилучший выбор. Задача 12 (базовый уровень). Рабочая тетрадь / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
7. Гордин Р. К. ЕГЭ 2020. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И.В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
8. Гордин Р. К. ЕГЭ 2020. Математика. Решение задачи 16. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
9. Гордин Р. К. ЕГЭ 2020. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень). ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
10. Гущин Д. Д., Малышев А. В. ЕГЭ 2018. Математика. Задачи прикладного содержания. Задача 10 (профильный уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко – М. : МЦНМО, 2020.
11. Задача 15 (профильный уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
12. Трепалин А. С. ЕГЭ 2020. Математика. Графики и диаграммы. Задача 2 (профильный уровень). Задача 11 (базовый уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко – М. : МЦНМО, 2020.
13. Хачатурян А. В. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи по планиметрии. Задача 6 (профильный уровень). Задачи 8, 15 (базовый уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
14. Хачатурян А. В. ЕГЭ 2020. Математика. Наглядная геометрия. Задача 3 (профильный уровень). Задача 8 (базовый уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
15. Шестаков С. А. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи по стереометрии. Задача 8 (профильный уровень). Задачи 13 и 16 (базовый уровень). Рабочая тетрадь / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.

16. Шестаков С. А. ЕГЭ 2020. Математика. Значения выражений. Задача 9 (профильный уровень). Задачи 2 и 5 (базовый уровень). Рабочая тетрадь / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
17. Шестаков С. А. ЕГЭ 2018. Математика. Задачи на составление уравнений. Задача 11 (профильный уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
18. Шестаков С. А. ЕГЭ 2020. Математика. Производная и первообразная. Исследование функций. Задача 12 (профильный уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
19. Шестаков С. А. ЕГЭ 2020. Математика. Простейшие уравнения. Задача 5 (профильный уровень). Задачи 4 и 7 (базовый уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И.В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
20. Шестаков С. А., Захаров П. И. ЕГЭ 2020 Математика. Уравнения и системы уравнений. Задача 13 (профильный уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
21. Шестаков С. А., ЕГЭ 2020. Математика. Неравенства и системы неравенств.
22. Шестаков С. А. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень). ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
23. Шестаков С. А. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
24. Шноль Д. Э. ЕГЭ 2020. Математика. Арифметические задачи. Задача 1 (профильный уровень). Задачи 3 и 6 (базовый уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
25. Ященко И. В., Шестаков С. А. Математика. Профильный уровень. Методические указания. ФГОС – М. : МЦНМО, 2020.
26. Ященко И. В., Захаров П. И. ЕГЭ 2020. Математика. Геометрический смысл производной. Задача 7 (профильный уровень). Задача 14 (базовый уровень). Рабочая тетрадь. ФГОС / под ред. И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2020.
27. Открытый банк математических задач ЕГЭ // [Электронный ресурс] – URL: http://www.mathege.ru
28. ФИПИ: Открытый банк задач ЕГЭ // [Электронный ресурс] – URL: http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege
29. Всероссийские проверочные работы. Информационный портал // [Электронный ресурс] – URL: https://vpr.statgrad.org/
30. База материалов по подготовке к ЕГЭ и ОГЭ (РПК Иркутской области по математике) // [Электронный ресурс] – URL: https://drive.google.com/drive/u/0/folders/1RzQyy9P8e04SoXtZI9aPop2lXe01gc0D

**Результаты**
**единого государственного экзамена**
**в Иркутской области в 2020 году**

Методические рекомендации

**МАТЕМАТИКА**


Авторы-составители:

Максим Александрович Гаер
Андрей Григорьевич Зенцов
Елена Сергеевна Лапшина





Подписано в печать 09.11.2020
Формат бумаги 60×84 1/16
Объем 2,79 усл. печ. л.
Заказ 20–096. Тираж 10 экз.
Отпечатано в оперативной типографии
ГАУ ИО ЦОПМКиМКО
664023, г. Иркутск, ул. Лыткина, 75А
тел./факс: :8(3952)500-287
e-mail: coko38@outlook.com