Министерство образования Иркутской области
Государственное автономное учреждение Иркутской области
«Центр оценки профессионального мастерства, квалификаций педагогов и мониторинга качества образования»

Методический анализ результатов единого государственного экзамена по математике профильного уровня в Иркутской области в 2023 году

Иркутск, 2023 г.

Методический анализ результатов единого государственного экзамена по математике профильного уровня в Иркутской области в 2023 году / Составители: Гаер М.А., канд. техн. наук, доцент, Зенцов А.Г., Лапшина Е.С. канд. ф.-м. наук, доцент.

В методическом анализе представлены данные о результатах ЕГЭ в Иркутской области. Проведены анализ результатов ЕГЭ по учебному предмету и анализ типичных затруднений выпускников региона при выполнении заданий ЕГЭ. Даны рекомендации по совершенствованию преподавания учебного предмета для всех обучающихся, а также по организации дифференцированного обучения школьников с разным уровнем предметной подготовки.

Анализ может быть использован:

– специалистами органов исполнительной власти, осуществляющих государственное управление в сфере образования, для принятия управленческих решений по совершенствованию процесса обучения;

– специалистами организаций дополнительного профессионального образования при разработке и реализации дополнительных профессиональных программ повышения квалификации учителей и руководителей образовательных организаций;

– методическими объединениями учителей-предметников при планировании обмена опытом работы и распространении эффективных методик обучения учебному предмету и подготовки обучающихся к государственной итоговой аттестации;

– руководителями образовательных организаций и учителями-предметниками при планировании учебного процесса и выборе технологий обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

Перечень условных обозначений, сокращений и терминов

АТЕ	Административно-территориальная единица
ВПЛ	Выпускники прошлых лет, допущенные в установленном порядке к сдаче ЕГЭ
ВТГ	Выпускники текущего года, обучающиеся, допущенные в установленном порядке к ГИА в форме ЕГЭ
ГИА-11	Государственная итоговая аттестация по образовательным программам среднего общего образования
ЕГЭ	Единый государственный экзамен
КИМ	Контрольные измерительные материалы
Минимальный балл	Минимальное количество баллов ЕГЭ, подтверждающее освоение образовательной программы среднего общего образования
ОИВ	Органы исполнительной власти субъектов Российской Федерации, осуществляющие государственное управление в сфере образования
ОО	Образовательная организация, осуществляющая образовательную деятельность по имеющей государственную аккредитацию образовательной программе
РИС	Региональная информационная система обеспечения проведения государственной итоговой аттестации обучающихся, освоивших основные образовательные программы основного общего и среднего общего образования
Участник ЕГЭ / участник экзамена / участник	Обучающиеся, допущенные в установленном порядке к ГИА в форме ЕГЭ, выпускники прошлых лет, допущенные в установленном порядке к сдаче ЕГЭ
Участники ЕГЭ с ОВЗ	Участники ЕГЭ с ограниченными возможностями здоровья
ФПУ	Федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ основного общего и среднего общего образования

Методический анализ результатов ЕГЭ по учебному предмету <u>«Математика» (профильный уровень)</u>

1. ХАРАКТЕРИСТИКА УЧАСТНИКОВ ЕГЭ ПО УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ

1.1. Количество[1] участников ЕГЭ по учебному предмету (за 3 года)

Таблица -1

2021 г.		2022 г.		2023 г.	
чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
8199	63,9	6643	48,4	6012	47,05

1.2. Процентное соотношение юношей и девушек, участвующих в ЕГЭ

Таблица -2

Пол	2021 г.		2022 г.		2023 г.	
	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
Женский	3932	48,0	2942	44,3	2541	42,3
Мужской	4267	52,04	3701	55,7	3471	57,7

1.3. Количество участников ЕГЭ в регионе по категориям

Таблица -3

Всего участников ЕГЭ по предмету	6012	
Из них: – ВТГ, обучающихся по программам СОО	чел. 5738	% 95,4
– ВТГ, обучающихся по программам СПО	40	0,7
– ВПЛ	231	3,8
– ВПЛ, не завершивших обучение в предыдущие годы	3	0,05
– участников с ОВЗ	62	1,03

1.4. Количество участников ЕГЭ по типам ОО

Таблица -4

Всего ВТГ	5781	
Из них: – выпускники лицеев и гимназий	чел. 1461	% 25,3
– выпускники СОШ с углубленным изучением отдельных предметов	334	5,8
– выпускники СОШ	3807	65,9
– выпускники СОШ-интернат	69	1,2
– выпускники кадетских корпусов	20	0,4
– выпускники вечерних СОШ	50	0,9
– выпускники СПО	40	0,7

[1] Количество участников основного периода проведения ГИА

1.5. Количество участников ЕГЭ по предмету по АТЕ региона

Таблица -5

№ п/п	АТЕ	Общее количество участников ЕГЭ в АТЕ	Количество участников ЕГЭ по учебному предмету	% от общего числа участников в регионе
1	Ангарский городской округ	1251	708	5,5
2	Зиминское городское МО	166	64	0,5
3	Зиминское районное МО	37	11	0,1
4	г. Иркутск	4254	2263	17,7
5	Иркутское районное МО	549	199	1,6
6	МО Аларский район	70	31	0,2
7	МО Балаганский район	22	11	0,09
8	МО Баяндаевский район	92	31	0,2
9	МО Боханский район	98	44	0,3
10	МО Братский район	194	68	0,5
11	МО город Саянск	230	111	0,9
12	МО город Свирск	52	28	0,2
13	МО город Тулун	199	100	0,8
14	МО город Усолье-Сибирское	363	168	1,3
15	МО город Усть-Илимск	378	161	1,3
16	МО город Черемхово	228	77	0,6
17	МО города Бодайбо и района	51	37	0,3
18	МО города Братска	1132	528	4,1
19	МО Жигаловский район	39	25	0,2
20	МО Заларинский район	81	46	0,4
21	МО Иркутской области Казачинско-Ленский район	83	32	0,3
22	МО Катангский район	15	5	0,04
23	МО Качугский район	70	23	0,2
24	МО Киренский район	95	32	0,3
25	МО Куйтунский район	113	61	0,5
26	МО Мамско-Чуйский район	19	3	0,02
27	МО Нижнеилимский район	195	79	0,6
28	МО "Нижнеудинский район"	311	108	0,9
29	МО Нукутский район	75	22	0,2
30	Осинский муниципальный район	134	44	0,3
31	Слюдянский муниципальный район	201	96	0,8
32	МО Тайшетский район	442	148	1,2
33	МО Тулунский район	76	31	0,2
34	МО Усть-Илимский район	52	18	0,1
35	МО "Эхирит-Булагатский район"	280	97	0,8
36	Ольхонское районное МО	71	29	0,2
37	Районное МО Усть-Удинский район	82	16	0,1
38	Усольский муниципальный район Иркутской области	144	85	0,7
39	Усть-Кутское МО	236	104	0,8
40	Черемховское районное МО	90	43	0,3
41	Чунское районное МО	130	42	0,3
42	МО Шелеховский муниципальный район	332	162	1,3
43	СПО г. Иркутска	47	21	0,2

1.6. Основные учебники по предмету из федерального перечня Минпросвещения России (ФПУ)[2], которые использовались в ОО Иркутской области в 2022-2023 учебном году

Таблица -6

№ п/п	Название учебников ФПУ	Примерный процент ОО, в которых использовался учебник
1.	Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 класс. Базовый и углубленный уровни.; Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б.; АО «Издательство «Просвещение»	48,7
2.	Алгебра и начала математического анализа. (10-11) Базовый и углублённый уровни; Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др; АО «Издательство «Просвещение»	28,2
3.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. (10-11) Базовый и углублённый уровни; Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др; АО «Издательство «Просвещение»	13,1
4.	Алгебра и начала математического анализа. (10-11) Базовый и углублённый уровни; Алимов Ш.А., Ю.М. Колягин; АО «Издательство «Просвещение»	11,0
5.	Математика: алгебра и начала математического анализа (в 2 частях); Мордкович А.Г., Семенов П.В., и др; под редакцией Мордковича А.Г; ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»	9,9
6.	Математика. Алгебра и начала математического анализа; Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С; под редакцией Подольского В.Е; ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»; Базовый уровень	4,6
7.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия 10-11 (базовый и углубленный уровни); Погорелова А.В., Погорелов А.В; АО «Издательство «Просвещение»; Базовый уровень	3,8
8.	Математика. Алгебра и начала математического анализа; Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М; под редакцией Подольского В.Е; ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»; Углубленный уровень	2,7
9.	Геометрия; А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, М.С.Якир; ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»; Базовый уровень	2,0
10.	Математика. Геометрия; Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С; под редакцией Подольского В.Е; ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»; Базовый уровень	2,0
11.	Математика. Алгебра и начала математического анализа; Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М; под редакцией Подольского В.Е; АО «Издательство «Просвещение»; Углубленный уровень	1,0

[2] Федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ основного общего и среднего общего образования

№ п/п	Название учебников ФПУ	Примерный процент ОО, в которых использовался учебник
12.	Математика. Геометрия; Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С. под ред. Подольского В.Е; АО «Издательство «Просвещение»; Углубленный уровень	1,0
13.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Мордкович А.Г., Смирнова И.М; ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»; Базовый уровень	0,8
14.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа; Муравин Г.К., Муравина О.В; АО «Издательство «Просвещение»; Базовый уровень	0,8
15.	Математика. Геометрия; Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М; под редакцией Подольского В.Е; ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»; Углубленный уровень	0,7
16.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа; Муравин Г.К., Муравина О.В; ООО «ДРОФА»; Углубленный уровень	0,5
17.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия 10-11 (базовый и углубленный уровни) . ; Погорелова А.В. Погорелов А.В; АО «Издательство «Просвещение»; Базовый уровень	0,3
18.	Геометрия; А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.Н. Рябинович, М.С. Якир; ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»; Базовый уровень	0,2
19.	Математика. Алгебра и начала анализа; Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С. под ред. Подольского В.Е; АО «Издательство «Просвещение»; Базовый уровень	0,2
20.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа.; Мордкович А.Г., Семенов П.В.; ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»; Базовый уровень	0,2
21.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа; Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И; АО «Издательство «Просвещение»	0,2
22.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия; Смирнов В.А., Смирнова И.М; ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»; Углубленный уровень	0,2
23.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия; Бутузов В.Ф., Прасолов В.В. под редакцией Садовничего В.А; АО «Издательство «Просвещение»; Углубленный уровень	0,2
24.	Математика: Геометрия; Потоскуев Е.В., Звавич Л.И; ООО «ДРОФА»; Углубленный уровень	0,2

1.7. ВЫВОДЫ о характере изменения количества участников ЕГЭ по учебному предмету

Количество участников ЕГЭ по профильной математике за последние 3 года постоянно уменьшается. Более значительное уменьшение было в 2022 году по сравнению с 2021 годом: с 8 199 (64% от общего числа участников) до 6 643 человек (48% от общего числа участников). В 2023 году также были изменения в сторону уменьшения, но уже не такие большие: 6 012 человек (47% от общего числа участников). Эти данные говорят о том, что общее число участников экзамена на протяжении трёх последних лет оставалось примерно одинаковым, а уменьшалось именно количество выпускников, выбравших профильную математику. На наш взгляд, это связано с тем, что в 2022 году в ЕГЭ по математике профильного уровня были внесены существенные изменения в его первую часть (задания с кратким ответом), что повысило в целом уровень сложности всего экзамена. Поэтому выпускники, которым не нужны результаты экзамена по профильной математике для поступления в вуз, предпочли не рисковать, не стали выбирать экзамен по профильной математике «на всякий случай» и сдавали экзамен базового уровня. Другой контингент выпускников, которые предпочли экзамен по базовой математике, а не по профильной – это так называемые «медалисты», медаль которым могли не выдать из-за низкого (менее 70 баллов) результата на ЕГЭ по профильной математике.

Отметим также, что большое количество участников ЕГЭ по математике профильного уровня в 2021 г. можно еще объяснить особенностями проведения ГИА в 2021 году, когда результат ЕГЭ по математике не влиял на получение аттестата (ЕГЭ по базовому уровню не было), а результат профильного требовался только для поступления в вуз, и его мог выбрать любой участник.

Разность количества юношей и девушек среди участников ЕГЭ по математике профильного уровня в 2023 году уже традиционно опять подросла. Напомним, что за последние несколько лет этот показатель растет от почти равного нулю в 2019 году (количество юношей было всего на 17 меньше, чем девушек) до 163 в 2020 году (юношей уже больше, чем девушек) и до 335 в 2021 году (юношей также больше, чем девушек). В 2022 году скачок еще более существенный – девушек сдавало меньше, чем юношей, на 759 человек. В 2023 году эта тенденция продолжается, и юношей было больше, чем девушек, уже на 930 человек. По данным из таблицы 2 видно также, что процент девушек-участников ЕГЭ по математике профильного уровня, от общего числа участников с каждым годом рассматриваемого периода уменьшается (2021 г. – 48%; 2022 г. – 44,3%; 2023 г. – 42,3%), а число юношей, наоборот, увеличивается (52%, 55,7%, 57,7% соответственно). Можно предположить, что такое положение дел связано с тем, что девушки все чаще выбирают для сдачи ЕГЭ другие предметы, а значит, и вузы, в которых результаты ЕГЭ по математике не требуются для поступления. Поэтому они выбирают экзамен по базовой математике, являющийся обязательным для получения аттестата о среднем образовании (разумеется, в том случае, если выпускник не выбрал экзамен по профильной математике).

В 2022 году нарушилась тенденция увеличения среди участников числа выпускников прошлых лет (ВПЛ), продолжающаяся несколько последних экзаменационных кампаний. Так, если в 2020 и 2021 гг. таких участников было 311 и 386 соответственно, то в 2022 году их количество уменьшилось до 265. В 2023 году количество ВПЛ продолжает уменьшаться – 231 участник. И в процентном отношении количество ВПЛ среди участников в 2021-2023 гг. тоже снижалось (2021 г. – 4,7%; 2022 г. – 4,0%; 2023 – 3,8%). В предыдущие годы рост числа ВПЛ среди участников ЕГЭ по математике профильного уровня мы связывали с тем, что среди них всё больше становилось участников, которые сдавали экзамен не для поступления в вузы, а по другим причинам. Например, для повышения своей квалификации. Свои результаты о сдаче ЕГЭ на 100 баллов часто используют репетиторы для привлечения клиентов. Теперь же замечаем, что в 2022 и 2023 гг. эта ситуация начала меняться в сторону уменьшения таких участников экзамена.

Число участников, обучающихся по программам СПО, за последние три года менялось незначительно (2021 г. – 48, 2022 г. – 34, 2023 г. – 40). Участников с ограниченными возможностями здоровья в 2022 году было почти на треть меньше, чем в 2021 году, а в 2023 году их число немного подросло (2021 г. – 75, 2022 г. – 55, 2023 г. – 62). С другой стороны, эти числовые значения сами по себе довольно малы, поэтому можно сказать, что ситуация в рассматриваемый период менялась незначительно.

Процент участников ЕГЭ по математике на профильном уровне в 2023 году, окончивших лицеи, гимназии и школы с углубленным изучением отдельных предметов, продолжил увеличиваться, что наблюдается уже несколько лет подряд, в том числе и за последние три года (2021 г. – 27,6%; 2022 г. – 30,1%; 2023 г. – 31,1%). На наш взгляд, это связано с тем, что в лицеи и гимназии всё чаще идут учиться школьники с целью получения хорошей подготовки к ЕГЭ в целом и по математике в частности. Статус лицеев и гимназий, их хорошие результаты позволяют привлекать как лучших учеников, так и лучших преподавателей. При этом общее число таких участников колеблется: то увеличивается в 2021 году на 124 участника по сравнению с 2020 годом (2020 г. – 2033; 2021 г. – 2157), то уменьшается в 2022 году до 1921, что по сравнению с 2021 г. меньше на 236. В 2023 году их количество еще уменьшилось на 126 выпускников и составило 1 795 человек. Эти колебания происходят «синхронно» с ежегодными колебаниями общего количества участников ВТГ.

Аналогичные колебания видны и в количестве выпускников вечерних школ (2021 г. – 89; 2022 г. – 35; 2023 г. – 50). А количество выпускников СОШ-интернат стабильно уменьшается в последние годы (2021 г. – 85; 2022 г. – 79; 2023 г. – 69). Но здесь опять числовые значения сами по себе довольно малы, поэтому можно сказать, что ситуация в рассматриваемый период в целом не менялась.

Анализ количества участников по АТЕ ЕГЭ по математике профильного уровня показал, что заметные колебания есть лишь у больших территорий (то есть у тех территорий, где относительно большое количество участников), таких как г. Иркутск (2021 г. – 2 763 участника, или 11%; 2022 г. – 2 435 участников, или 17,7%; 2023 г. – 2 263 участников, или 17,7%), Ангарский городской округ (2021 г. – 914 участников, или 3,7%; 2022 г. – 692 участника, или 4,8%; 2023 г. – 708 участников, или 5,5%) и МО г. Братска (2021 г. – 750 участников, или 5,8%; 2022 г. – 551 участник, или 4,0%; 2023 г – 528 участников, или 4,1%). В г. Иркутске и Ангарском городском округе до 2021 года был рост количества участников, как в абсолютных, так и в относительных значениях, при этом в 2022 году произошло значительное снижение количества участников, а в 2023 году это снижение продолжилось, правда, только в абсолютных значениях, а относительные значения остались на том же уровне (17,7%). Это связано с тем, что с 2022 года, как мы уже писали выше, выпускникам необходимо было выбрать один из экзаменов по математике: профильного или базового уровня. Отток из участников экзамена по профильной математике в участники экзамена по базовой математике в 2022 и 2023 гг. произошёл из-за того, что, во-первых, выпускники уже начали привыкать к существованию разделения экзамена и все меньше выпускников выбирают профильную математику «на всякий случай», если она не нужна им для поступления в вуз, во-вторых, ЕГЭ по математике профильного уровня значительно усложнился (по крайней мере, его часть с кратким ответом) по сравнению с предыдущими годами. В остальных АТЕ изменения количества участников в процентном отношении незначительные и в абсолютных показателях составляют плюс-минус несколько человек.

Все АТЕ используют учебники, одобренные Министерством просвещения РФ, и все они соответствуют требованиям подготовки к ЕГЭ.

В 2023 году для освоения математики профильного уровня наибольшее количество АТЕ использовали следующие учебники:

– 48,7%

Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 класс. Базовый и углубленный уровни.; Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б.; АО «Издательство «Просвещение».

Для сравнения, в 2022 году на этот учебник приходилось 51,5%. В текущем году – 48,7%, что немного меньше.

Отметим еще пару учебников, также с наибольшим процентом использования АТЕ Иркутской области:

– 28,2%

Алгебра и начала математического анализа. (10-11) Базовый и углублённый уровни; Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др; АО «Издательство «Просвещение»; Углубленный уровень.

– 11%

Алгебра и начала математического анализа. (10-11) Базовый и углублённый уровни; Алимов Ш.А., Ю.М. Колягин; АО «Издательство «Просвещение»; Базовый уровень

В сумме это составляет 39,2 %, в то время как в 2022 году эти учебники использовали 38,5% ОО.

В 2023 году и в прошлые годы 13% ОО обучались по учебнику Никольского С.М.:

– *Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. (10-11) Базовый и углублённый уровни; Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.; АО «Издательство «Просвещение».*

Наиболее массовое использование вышеуказанных учебников является традиционным в Иркутской области, что можно видеть из наших отчетов предыдущих лет.

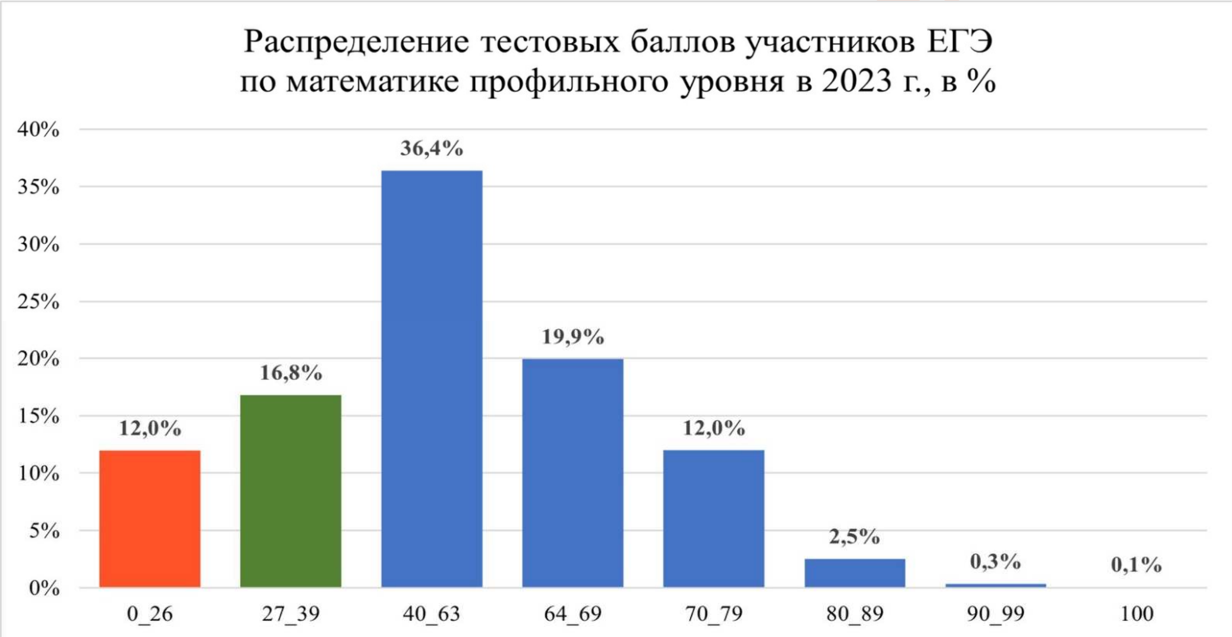
А также вышеперечисленные учебники можно отнести к так называемым классическим учебникам, по которым учится основная масса школьников как Иркутской области, так и всей страны.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЕГЭ ПО ПРЕДМЕТУ

2.1. Диаграмма распределения тестовых баллов участников ЕГЭ по предмету в 2023 г.

Покажем здесь распределение тестовых баллов в двух видах. Сначала стандартный вид с шагом 10 баллов.

Далее представим данные в более удобном в некотором смысле распределении баллов. А именно распределим их следующим образом: 0-26 (выпускники, не преодолевшие минимальный балл на аттестат), 27-39 (выпускники, которые преодолели минимальный балл на аттестат, но не прошли порог для поступления в вузы), 40-63 (не полностью справившиеся с первой частью экзамена), 64-69 (в промежуток входят и те, кто не смог подтвердить медаль), 70-79, 80-89, 90-99 (шаг в 10 баллов), и отдельно –стобалльники.



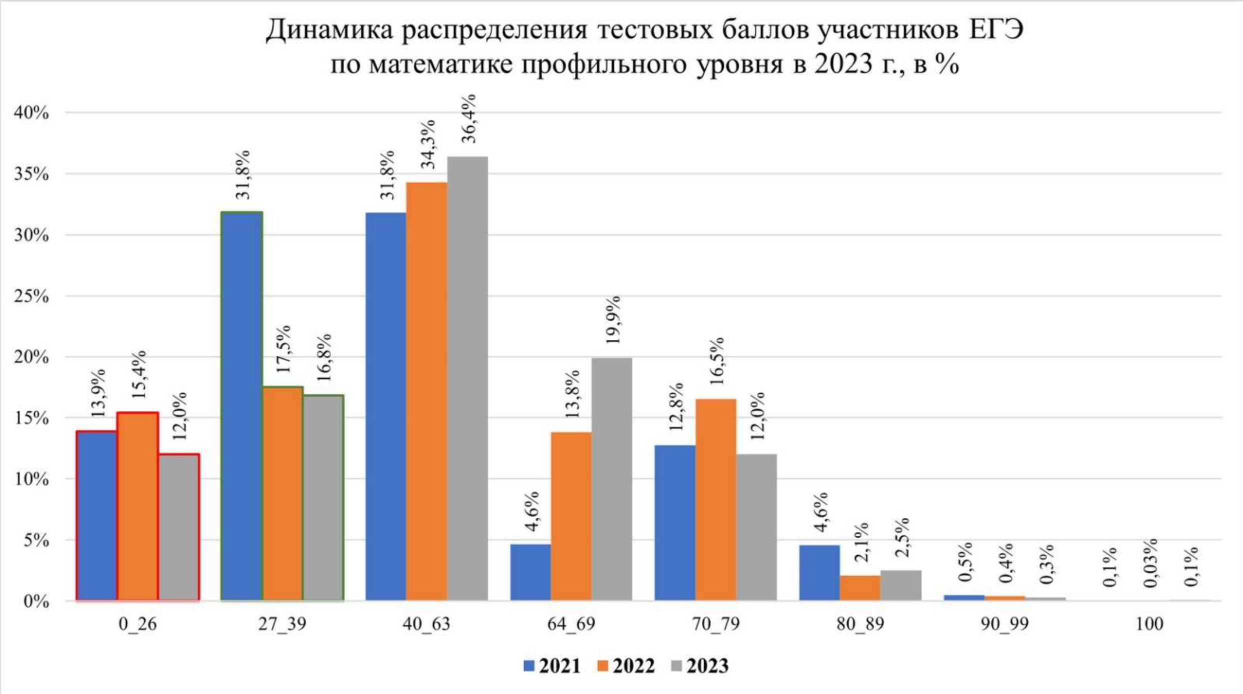
2.2. Динамика результатов ЕГЭ по предмету за последние 3 года

Таблица -7

№ п/п	Участников, набравших балл	Иркутская область		
		2021 г.	2022 г.	2023 г.
1.	ниже минимального балла[3], %	13,9	15,4	12,0
2.	от минимального балла до 60 баллов, %	58,03	51,8	53,2
3.	от 61 до 80 баллов, %	24,3	31,2	32,8
4.	от 81 до 99 баллов, %	3,7	1,7	2,03
5.	100 баллов, чел.	5	2	4
6.	Средний тестовый балл	46,4	47,7	49,09

[3] Здесь и далее: минимальный балл – установленное Рособрнадзором минимальное количество баллов ЕГЭ, подтверждающее освоение образовательной программы среднего общего образования.

Ниже представлено на диаграммах распределение по баллам (как и в предыдущем пункте) следующим образом: 0-26 (выпускники, не преодолевшие минимальный балл на аттестат), 27-39 (выпускники, которые преодолели минимальный балл на аттестат, но не прошли порог для поступления в вузы), 40-63 (не полностью справившиеся с первой частью экзамена), 64-69 (в промежуток входят и те, кто не смог подтвердить медаль), 70-79, 80-89, 90-99 (шаг в 10 баллов), и отдельно –стобалльники.



2.3. Результаты ЕГЭ по предмету по группам участников экзамена с различным уровнем подготовки

2.3.1. В разрезе категорий участников ЕГЭ

Таблица -8

№ п/п	Участников, набравших балл	ВТГ, обучающиеся по программам СОО	ВТГ, обучающиеся по программам СПО	ВПЛ	ВПЛ, не завершившие ГИА в предыдущие годы	Участники экзамена с ОВЗ
1.	Доля участников, набравших балл ниже минимального	10,6	52,5	39,0	33,3	17,7
2.	Доля участников, получивших тестовый балл от минимального балла до 60 баллов	53,6	42,5	45,9	66,7	45,2
3.	Доля участников, получивших от 61 до 80 баллов	33,7	5	13,9	0	35,5
4.	Доля участников, получивших от 81 до 99 баллов	2,07	0	1,3	0	1,6
5.	Количество участников, получивших 100 баллов	4	0	0	0	0

2.3.2. В разрезе типа ОО

Таблица -9

Тип ОО	Доля участников, получивших тестовый балл				Количество участников, получивших 100 баллов
	ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 99 баллов	
СОШ	13,2	60,3	26,1	0,5	2
СОШ-интернат	10,1	58,0	31,9	0	0
Лицеи, гимназии	2,8	38,6	52,7	5,8	2
СОШ с УИОП	7,5	43,7	44,0	4,8	0
Кадетский корпус	20	70	10	0	0
Вечерние СОШ	60	34	6	0	0
СПО	42,9	52,4	4,8	0	0

2.3.3. Основные результаты ЕГЭ по предмету в сравнении по АТЕ

Таблица -10

№ п/п	Наименование АТЕ	Количество участников экзамена, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл				Количество участников, получивших 100 баллов
			ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов	
1	Ангарский городской округ	708	9,8	54,1	33,6	2,5	0
2	Зиминское городское МО	64	10,9	64,1	25	0	0
3	Зиминское районное МО	11	9,09	72,7	18,2	0	0
4	г. Иркутск	2263	10,2	49,4	37,2	3,2	1
5	Иркутское районное МО	199	12,1	56,8	31,2	0	0
6	МО Аларский район	31	22,6	54,8	22,6	0	0
7	МО Балаганский район	11	0	81,8	18,2	0	0
8	МО Баяндаевский район	31	12,9	61,3	25,8	0	0
9	МО Боханский район	44	15,9	63,6	20,5	0	0
10	МО Братский район	68	14,7	70,6	13,2	1,5	0
11	МО город Саянск	111	11,7	63,1	24,3	0,9	0
12	МО город Свирск	28	25	42,9	32,1	0	0
13	МО город Тулун	100	3	61	35	1	0
14	МО город Усолье-Сибирское	168	8,9	54,2	36,3	0,6	0
15	МО город Усть-Илимск	161	13,7	41,0	42,2	2,5	1
16	МО город Черемхово	77	16,9	52,0	28,6	2,6	0
17	МО города Бодайбо и района	37	13,5	62,2	24,3	0	0
18	МО города Братска	528	12,7	50,8	34,5	2,1	0
19	МО Жигаловский район	25	8	84	8	0	0
20	МО Заларинский район	46	10,9	65,2	23,9	0	0
21	МО Иркутской области Казачинско-Ленский район	32	6,3	71,9	21,9	0	0
22	МО Катангский район	5	20	80	0	0	0
23	МО Качугский район	23	4,4	82,6	13,0	0	0
24	МО Киренский район	32	12,5	68,8	18,8	0	0
25	МО Куйтунский район	61	21,3	59,0	19,7	0	0
26	МО Мамско-Чуйский район	3	0	66,7	33,3	0	0
27	МО Нижнеилимский район	79	8,9	57,0	34,2	0	0
28	МО "Нижнеудинский район"	108	16,7	63,9	19,4	0	0
29	МО Нукутский район	22	27,3	45,5	22,7	4,6	0
30	Осинский муниципальный район	44	25	54,6	18,2	2,3	0
31	Слюдянский муниципальный район	96	7,3	64,6	28,1	0	0
32	МО Тайшетский район	148	15,5	56,1	27,7	0	1
33	МО Тулунский район	31	16,1	67,7	16,1	0	0
34	МО Усть-Илимский район	18	55,6	27,8	16,7	0	0
35	МО "Эхирит-Булагатский район"	97	14,4	55,7	29,9	0	0
36	Ольхонское районное МО	29	20,7	58,6	20,7	0	0
37	Районное МО Усть-Удинский район	16	12,5	87,5	0	0	0

№ п/п	Наименование АТЕ	Количество участников экзамена, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл				Количество участников, получивших 100 баллов
			ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов	
38	Усольский муниципальный район Иркутской области	85	17,7	54,1	25,9	2,4	0
39	Усть-Кутское МО	104	20,2	49,0	29,8	1,0	0
40	Черемховское районное МО	43	18,6	58,1	23,3	0	0
41	Чунское районное МО	42	7,1	61,9	28,6	2,4	0
42	МО Шелеховский муниципальный район	162	10,5	41,4	44,4	3,1	1
43	СПО г. Иркутска	21	61,9	38,1	0	0	0

2.4. Выделение перечня ОО, продемонстрировавших наиболее высокие и низкие результаты ЕГЭ по предмету

2.4.1. Перечень ОО, продемонстрировавших наиболее высокие результаты ЕГЭ по предмету

В 2023 году в Иркутской области было 179 (из 515) образовательных организаций с количеством участников ЕГЭ по математике профильного уровня не менее 10.

Для формирования перечня ОО, продемонстрировавших наиболее высокие результаты ЕГЭ по математике, использовались следующие критерии:

1) количество участников экзамена (ВТГ) от ОО не менее 10;
2) доля участников ЕГЭ, не достигших минимального балла, имеет значения ниже 3%;
3) доля участников ЕГЭ, получивших от 81 до 100 баллов, имеет значения не менее 5%;
4) доля участников ЕГЭ, получивших тестовый балл от минимального балла до 60 баллов, имеет значения менее 40%.

Проведя критериальный отбор, в перечень вошли 11 образовательных организаций Иркутской области, что составляет около 6% от 179 ОО с количеством участников не менее 10.

Таблица -11

№ п/п	Наименование ОО	Количество участников, чел.	Доля ВТГ, получивших от 81 до 100 баллов	Доля ВТГ, получивших от 61 до 80 баллов	Доля ВТГ, получивших от минимального до 60 баллов	Доля ВТГ, не достигших минимального балла
1.	МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска	115	18	66	16	0
2.	МБОУ "СОШ №10" (Ангарский городской округ)	53	17	53	28	2
3.	МАОУ ЦО № 47 г. Иркутска	44	14	59	27	0
4.	МБОУ "Лицей № 1" (МО города Братска)	31	13	58	29	0
5.	МБОУ г. Иркутска гимназия № 1	45	9	78	11	2
6.	МБОУШР "Шелеховский лицей" (МО Шелеховский муниципальный район)	62	8	73	19	0
7.	МБОУ "Гимназия № 1 им. А.А. Иноземцева" (МО города Братска)	40	8	58	33	3
8.	МАОУ "СОШ № 27" (Ангарский городской округ)	27	7	59	33	0
9.	МАОУ "Городская гимназия № 1" (МО город Усть-Илимск)	14	7	71	21	0
10.	МБОУ г. Иркутска лицей № 2	63	6	70	24	0
11.	МАОУ "Экспериментальный лицей имени Батербиева М.М." (МО город Усть-Илимск)	16	6	56	38	0

2.4.2. Перечень ОО, продемонстрировавших низкие результаты ЕГЭ по предмету

В 2023 году в Иркутской области было 179 (из 515) образовательных организаций с количеством участников ЕГЭ по математике профильного уровня не менее 10.

В таблице 2-12 представлен список образовательных организаций, у которых:

1) количество участников экзамена от ОО не менее 10;
2) доля участников ЕГЭ, не достигших минимального балла, имеет значения выше 25%;
3) нет участников, набравших от 81 до 100 баллов;
4) доля участников ЕГЭ, получивших от 61 до 80, имеет значения 15% и ниже.

Из 179 образовательных организаций с количеством участников экзамена по математике не менее 10 в список вошли 12, что составляет около 7%.

Таблица -12

№ п/п	Наименование ОО	Количество участников, чел.	Доля участников, не достигших минимального балла	Доля участников, получивших от минимального балла до 60 баллов	Доля участников, получивших от 61 до 80 баллов	Доля участников, получивших от 81 до 100 баллов
1.	МБОУ г. Иркутска ЦО № 10	13	69	31	0	0
2.	МБОУ г. Иркутска СОШ № 7	15	60	27	13	0
3.	МБОУ "СОШ № 7" (Ангарский городской округ)	15	47	47	7	0
4.	МБОУ г. Иркутска СОШ № 3	10	40	60	0	0
5.	МБОУ "СОШ № 45" (МО города Братска)	16	38	50	13	0
6.	МБОУ г. Иркутска СОШ № 15	22	36	55	9	0
7.	МКОУ СОШ №23 г. Тайшета (МО Тайшетский район)	12	33	58	8	0
8.	МОУ "СОШ № 7" (МО город Саянск)	10	30	60	10	0
9.	МБОУ "Мишелевская СОШ № 19" (Усольский муниципальный район Иркутской области)	14	29	64	7	0
10.	МБОУ "СОШ № 34" (МО города Братска)	15	27	60	13	0
11.	МБОУ г. Иркутска СОШ № 10 им. П. А. Пономарёва	31	26	61	13	0
12.	МОУ "СОШ № 1 г. Свирска"	12	25	75	0	0

2.5. ВЫВОДЫ о характере изменения результатов ЕГЭ по предмету

В рассматриваемый период с 2021 года по 2023 год постоянно растёт значение среднего тестового балла участников ЕГЭ по математике профильного уровня: 2021 г. – 46,4; 2022 г. – 47,7; 2023 г. – 49,1.

При этом за последние три года уменьшилась доля участников, не набравших минимальный балл (0-26), с 14% в 2021 году и 15,5% в 2022 году до 12% в 2023 году.

Также уменьшается и доля участников, набравших минимальный балл, но не прошедших порог для поступления в вузы (27-39): 2021 г. – 31%, 2022 г. – 17,5%, 2023 г. – 16,8%.

Однако и доля выпускников с высокими баллами тоже становится меньше в последние годы. Так, доля участников экзамена с баллами 70-79 составляла в 2021 году 13%, в 2022 году – 16,5%, а в 2023 году – всего 12%. Доля участников, набравших 80-89 баллов, уменьшилась с 4,6% в 2021 году до 2,1% и 2,5% в 2022 и 2023 гг. соответственно. Количество выпускников с баллами от 90 до 99 у нас традиционно небольшое, но и оно уменьшается как в абсолютных, так и в относительных значениях: 2021 г. – 41 (0,5%), 2022 г. – 29 (0,4%), 2023 г. – 21 (0,3%).

За счет уменьшения долей участников вышеперечисленных групп естественным образом происходит увеличение выпускников со средними баллами. К ним отнесем участников экзамена с баллами 40-63 (напомним, что 64 балла – это тот максимум, который можно набрать, решая только задания с кратким ответом): 2021 г. – 32%, 2022 г. – 34%, 2023 г. – 36,4%. Более значительно увеличилась доля участников, набравших 64-69 баллов: 2021 г. – 4,6%; 2022 г. – 13,8%; 2023 г. – 19,9%.

Количество стобалльников в нашем регионе всегда измерялось единицами, так же как и в текущем году: 2021 г. – 5; 2022 г. – 2; 2023 г. – 4.

В разрезе категорий участников ЕГЭ по математике профильного уровня, разумеется, наибольшее число участников – это выпускники текущего года, обучающиеся по программам СОО. Поэтому показатели с их динамикой участников этой категории аналогичны показателям в целом по региону. Например, число участников этой категории, не преодолевших минимальный балл, уменьшилось с 12,9% в 2021 г. и 14,1% в 2022 г.

Среди ВТГ, обучающихся по программам СПО, каждый год с 2021 по 2023 г. около половины участников ЕГЭ по математике профильного уровня набирали балл ниже минимального. Большинство из другой половины получили результат до 60 баллов. Никто из участников этой категории в течение трёх последних лет не набрал более 80 баллов. Доля участников, набравших от 61 до 80 баллов, традиционно небольшая, но нестабильная, то увеличивается, то уменьшается: 2021 г. – 4%, 2022 г. – 9%, 2023 г. – 5%.

Примечательно, что в 2022 году доля участников среди ВПЛ, не преодолевших порог минимального балла, выросла почти в 1,5 раза по сравнению с 2021 годом: 2021 г. – 29,8%; 2022 г. – 40,4%. В 2023 году этот показатель остался примерно на том же уровне – 39%. Это связано, на наш взгляд, с тем, о чём мы уже писали выше – существенное изменение первой части (задания с кратким ответом) КИМ-2022 по сравнению с КИМ предыдущих лет, к которым готовилась основная масса выпускников прошлых лет.

В разрезе типов ОО отметим, что доля участников ЕГЭ по математике профильного уровня, не преодолевших минимальный балл, среди обучающихся в «обычных» СОШ значительно уменьшилась в 2023 году по сравнению с 2022 годом: с 17% до 13%. В СОШ с УИОП в 2023 году доля таких участников стала также меньше, чем в два предыдущих года: 2021 г. – 9,6%; 2022 г. – 8,1%; 2023 г. – 7,5%. Стоит отметить, что среди выпускников лицеев и гимназий этот показатель тоже стал меньше: 2021 г.– 5,0%; 2022 г.– 5,4%; 2023 г. – 2,8%. По нашему мнению, в последние годы выпускники более избирательно и ответственно относятся к выбору ЕГЭ по математике – профильного или базового уровня, с чем и связано улучшение данного показателя.

В 2023 году нарушены «традиции» последних нескольких лет: количество стобалльников увеличилось с 2 до 4, и они в этот раз совсем из других ОО. Так, все участники ЕГЭ, набравшие по 100 баллов в 2020 и 2021 годах, были выпускниками СОШ с УИОП (это, кстати, одна и та же школа – СОШ № 10 г. Ангарска). В 2022 году из двоих один снова из СОШ с УИОП № 10 г. Ангарска, а другой – из СОШ № 2 имени И.И. Куимова Нижнеудинского района. В 2023 году стобалльники из четырех разных МСУ: г. Иркутск (МБОУ Гимназия № 25 г. Иркутска), МО город Усть-Илимск (МАОУ «СОШ № 11»), МО Тайшетский район (МКОУ «СОШ № 85»), МО Шелеховский муниципальный район (МБОУШР «Шелеховский лицей»). Таким образом, один участник из лицея, один – из гимназии и два выпускника – из «обычных» СОШ. На наш взгляд, это указывает на то, что в современном мире есть дополнительные возможности (например, с помощью различных интернет-технологий) подготовиться на «отлично» не только выпускникам лицеев, гимназий и СОШ с УИОП, но и любому талантливому школьнику.

Среди участников 2023 года, как и ранее, набравших более 80 баллов, в основном выпускники лицеев, гимназий и СОШ с УИОП (10,6% против 8,9% в 2022 г.). Еще 0,5% таких участников приходится на выпускников «обычных» СОШ (для сравнения, 2021 г. – 1,8%, в 2022 г. – 0,4%). То есть по данным показателям хоть и есть изменения, но они небольшие, учитывая, что в абсолютных числах – это порядка 150 выпускников.

В разрезе АТЕ наибольшее изменение числа участников в сторону уменьшения в 2023 году по сравнению с 2022 годом было в г. Иркутске (минус 172 участника). Также довольно значительные изменения были в МО город Усолье-Сибирское – минус 60 участников и в МО Шелеховский муниципальный район – минус 50 участников. Если для г. Иркутска это не очень много в процентах – около 7,5, то для двух других МО относительные значения – 22% и 45% соответственно. Правда, в двух последних случаях речь идет о количестве участников порядка 200 человек, поэтому уменьшение на 50-60 участников дает столь значительные проценты.

Доля участников в 2023 году, набравших балл ниже минимального, уменьшилась в сравнении с 2022 годом более чем на 10% в нескольких АТЕ. Правда, имеет смысл говорить лишь о тех образовательных организациях, где количество участников более 50, так как при 50 участниках каждый человек –

это уже 2 процента. К ним относятся следующие АТЕ: Чунское районное МО (минус 21%), МО Братский район (минус 19%), МО город Усолье-Сибирское (минус 14%), МО Куйтунский район (минус 12%), Иркутское районное МО (минус 11%), Зиминское городское МО (10,4%). Заметим, что во всех этих МО в 2022 году по сравнению с 2021 годом было увеличение доли не прошедших порог, а значит, ситуация там нестабильная, и в 2022 году влияние, скорее всего, оказало изменение первой части КИМ в сторону усложнения. Значительное ухудшение этого показателя в 2023 году по сравнению с 2022 годом было в трех АТЕ, но с малым количеством участников экзамена: МО Катангский район (5 участников – плюс 20%), МО Усть-Илимский район (18 участников – плюс 31%), СПО г. Иркутска (21 участник – плюс 21%).

Изменения в диапазоне от 61 до 80 баллов, которые можно отметить без ссылки на малость количества участников АТЕ, – это наибольшее изменение (на 23%) в лучшую сторону в МО Братский район.

Как и в прошлые годы, число участников, получивших более 80 баллов, в регионе в 2023 году небольшое – всего 177 человек (для сравнения, всё же больше, чем в 2022 году – 123 человека). Только в двух АТЕ впервые за период с 2021 по 2023 год появились такие участники: Осинский муниципальный район (2,3% из 44 участников) и Усольский муниципальный район Иркутской области (2,4% из 85 участников). В МО Нукутский район в этом году наибольшая доля участников с более чем 80 баллами – 4,6%, правда, всего из 22 участников, то есть это лишь 1 участник. Однако и увеличение по сравнению с 2022 годом получилось на 1,5%, но и тогда это был всего 1 участник, просто всего участников было немного больше (35 человек). Своего рода стабильность – каждый год готовить хотя бы одного выпускника, набирающего более 80 баллов на ЕГЭ по математике профильного уровня.

При составлении перечня ОО, продемонстрировавших наиболее высокие и наиболее низкие результаты ЕГЭ по математике, были рассмотрены показатели 179 образовательных организаций региона с не менее чем 10 участниками.

В список школ с наиболее высокими результатами вошли 11 ОО, что составляет около 6% из 179 организаций. Только в трёх из этих ОО ненулевое количество участников, не достигших минимального балла, и составляет 2-3%.

Многие из указанных образовательных организаций в списке лучших школ уже не первый год. Так, в рассматриваемый период все три года подряд в списке школ с наилучшими показателями входили четыре организации: МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска (Иркутск); МБОУ «СОШ №10» (Ангарский городской округ); МБОУ г. Иркутска гимназия № 1 (Иркутск); МБОУ г. Иркутска лицей № 2 (Иркутск). Два последних года подряд в данный список попадает МБОУ «Гимназия № 1 имени А.А. Иноземцева» (МО города Братска). Вернулись в список лучших школ после пропуска 2022 года две ОО: МАОУ «Городская гимназия № 1» (МО город Усть-Илимск), МБОУ «Лицей № 1» (МО города Братска). Впервые в рассматриваемый период с 2021 по 2023 год включены в этот список следующие четыре ОО: МАОУ «СОШ № 27» (Ангарский городской округ); МАОУ «Экспериментальный лицей имени Батербиева М.М.» (МО город Усть-Илимск); МАОУ ЦО № 47 г. Иркутска (Иркутск); МБОУ «Гимназия № 1 имени А.А. Иноземцева» (МО города Братска); МБОУ «Лицей № 1» (МО города Братска); МБОУШР «Шелеховский лицей» (МО Шелеховский муниципальный район), в которой, кстати сказать, был один из четырех стобалльных результатов в Иркутской области.

Самые высокие показатели (доля получивших от 81 до 100 баллов) в Лицее ИГУ г. Иркутска (18% или 21 участник) и в СОШ № 10 г. Ангарска (17%, или 9 участников, как и в прошлом, 2022 году). При этом в Лицее ИГУ нет ни одного участника, не достигшего минимального балла, а в СОШ № 10 такой всего один (2%, кстати, в 2022 году таких было трое). Аналогичная ситуация была и в 2021 году, правда, доли получивших более 80 баллов были значительно выше – около 30%. В остальных школах рассматриваемого списка этот показатель 2022 года хоть и выше, чем у других, но все же ниже показателей 2021 года. В целом видно, что особых изменений за последние три года здесь нет.

В перечень ОО, показавших низкие результаты в 2023 году, включены 12 организаций, что составляет около 7% от 179 ОО с численностью не менее 10 человек. Доля участников, не достигших минимального балла, в этих ОО составила от 27 до 75%. Для сравнения, в такой перечень в 2021 году были включены 30 организаций, что составляло 14,5%. Доля участников, не достигших минимального балла, в этих ОО составила (почти, как и в 2023 году) от 27 до 64%. Если говорить о ГИА-2021, то в такой перечень были включены 29 организаций, что составляло 11,5%. Доля участников, не достигших минимального балла, в этих ОО составила от 27 до 77%. В 2020 году в данный перечень входило 25 ОО, и доля участников, не достигших минимального балла, составляла в них от 25 до 55%. То есть критерии отбора почти одинаковы в 2021-2023 годах.

Как правило, список школ с низкими показателями меняется из года в год очень значительно. Это связано в том числе с небольшим количеством (около 10) участников в большинстве из таких школ – то менее 10, то более. А также вес одного участника в этих случаях довольно большой, поэтому могут быть значительные вариации из года в год всех показателей.

Однако в списке 2023 года присутствует МБОУ г. Иркутска ЦО № 10, которое третий год подряд показывает низкие показатели. А также МБОУ г.

Иркутска СОШ № 7 и МОУ «СОШ № 1 г. Свирска» (МО город Свирск), которые были в подобном списке 2022 года.

Отдельно хотелось бы отметить, что есть ОО с малым количеством участников, из которых ни один не проходит минимальный порог. Так, например, уже два года подряд доля ВТГ, не достигших минимального балла, в МОУ Усть-Ордынская СОШ № 4 составляет 100%. В 2022 году было 4 участника, и все они не набрали минимального балла, в 2023 году количество участников было 2, и оба не сдали экзамен. Аналогичная ситуация в МКОУ Манзурская СОШ (МО Качугский район) и в МОУ «Невонская СОШ № 1» (МО Усть-Илимский район).

Вообще, в 2023 году 31 ОО, где 100% выпускников не прошли минимальный порог. Во всех этих ОО количество участников было от 1 до 5. В 2022 году аналогичная ситуация была в 22 образовательных организациях, а в 2021 году – в 14 школах. Как видим, ситуация статистически ухудшается в этом направлении. Однако отметим, что основной списочный состав образовательных организаций с этими показателями меняется из года в год.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что изменения результатов ЕГЭ по математике профильного уровня в Иркутской области колеблются незначительно как в сторону улучшения, так и в сторону их ухудшения.

Таким образом, в Иркутской области в целом итоги ЕГЭ по математике профильного уровня в 2023 году позволяют утверждать, что выпускники 11-х классов показывают стабильные результаты по профильной математике.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КИМ

3.1. Краткая характеристика КИМ по учебному предмету

Изменения в содержании КИМ-2023 по сравнению с КИМ-2022 отсутствуют. В структуру первой части КИМ внесены изменения, позволяющие участнику экзамена более эффективно организовать работу над заданиями за счёт перегруппировки заданий по тематическим блокам. Работа начинается с заданий по геометрии, затем следует блок заданий по элементам комбинаторики, статистике и теории вероятностей, а затем идут задания по алгебре и началам математического анализа

Содержательные особенности КИМ	
Часть 1	
Формулировки (сюжеты) заданий части 1 соответствуют демонстрационному варианту КИМ ЕГЭ по профильной математике 2023 года. В сравнении с 2022 годом принципиальных содержательных различий в части 1 2023 года нет.	
Часть 2	
№ 13	Задание несколько проще аналогичного в прошлом году, поэтому и процент выполнения стал выше: 1,2 вместо 0,6. Это задание имеет один из самых низких процентов выполнения.
№ 14	В этом году задание содержало логарифмическое неравенство вместо показательного, как в прошлом году, что вызвало больше проблем (в том числе и с ограничениями на функции), что привело к снижению процента выполнения с 21,5 до 8,4.
№ 15	Математическая модель задания №15 в сравнении с соответствующим заданием 2022 года значительно усложнилась. Весь период разбивается на два подпериода, у каждого из которых своё снижение остатка. При составлении уравнения надо было учитывать две арифметические прогрессии с различными разностями, что привело к проблемам даже тех, кто справился с составлением таблицы. В связи с этим процент выполнения этого задания в среднем снизился с 24,2 до 6,06, т.е. в 4 раза.
№ 16	Задачи по геометрии традиционно относятся к наиболее сложной части экзамена. В этом году для решения задачи №16 надо было обладать хорошими техническими навыками, что есть далеко не у всех выпускников. Поэтому процент выполнения снизился с 3,0 до 0,8.
№ 17	Задача существенно проще задачи прошлого года, необходимо было рассмотреть расположение гиперболы и двух прямых, что повысило процент выполнения с 1,8 до 2,8.
№ 18	Традиционно пункт а) в задании №18 имеет положительный ответ, для обоснования которого требуется построить пример, удовлетворяющий условие задачи. С этим пунктом нередко справляются даже те обучающиеся, которые не обладают особыми техническими навыками и знаниями. В прошлом году ответ был отрицательным и надо было доказывать, что условие не выполняется. Кроме того, много успешных попыток было и в решении пункта б). Традиционные проблемы сохранились в пункте в), где необходимо было сделать оценку и привести пример, подтверждающий точность оценки. В связи с упрощением первых двух пунктов процент выполнения повысился с 0,7 до 12,3

Указанные содержательные особенности заданий КИМ-2023 следующим образом сказались на статистике выполнения заданий. Были усложнены задания повышенного уровня сложности, с которыми, как правило, обучающиеся, приступающие к выполнению заданий части 2 с развернутым ответом, справлялись легче: № 14 (алгебраическое уравнение / неравенство) и № 15 (задача с экономическим содержанием). Это вызвало уменьшение результатов во всех категориях: до 60 т. б. с 2,5% до 0,1% (№ 14) и с 5,5% до 0,3% (№ 15), 61-80 т. б. с 59,7% до 19,9% (№ 14) и с 63,2% до 13,2% (№ 15), 81-100 т. б. с 97,8% до 86,9% (№ 14) и с 97,8% до 74,6% (№ 15). Также снизились результаты по планиметрии (№ 16): до 60 т. б. с 0,2% до 0,02%, 61-80 т. б. с 6,4% до 0,8%, 81-100 т. б. с 53,7% до 25,9%. С другой стороны, два задания, относящиеся к одним из самых трудных, №13 (стереометрия) и №18 (комбинаторно-алгебраическая задача), стали проще. Категория обучающихся со средним (61-80 т. б.) и высоким (81-100 т. б.) уровнями подготовки увеличилась с 0,92% до 1,5% и с 15,0% до 29,9% (№ 13) и с 0,8% до 21,0% и с 14,4% до 43,3% (№ 18) соответственно.

Все задания одной линии с развернутым ответом в 2023 году в разных вариантах отличались лишь числовыми данными, которые не влияли на ход решения. Поэтому такие различия не повлияли на результат в целом.

3.2. Анализ выполнения заданий КИМ

3.2.1. Статистический анализ выполнения заданий КИМ

Таблица -13

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[4]				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т. б.	в группе от 61 до 80 т. б.	в группе от 81 до 100 т. б.
1	Геометрия / Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	Б	72,3	28,7	69,5	91,1	100

[4] Вычисляется по формуле $p = \frac{N}{nm} \cdot 100\%$, где N – сумма первичных баллов, полученных всеми участниками группы за выполнение задания, n – количество участников в группе, m – максимальный первичный балл за задание.

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[4]				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т. б.	в группе от 61 до 80 т. б.	в группе от 81 до 100 т. б.
2	Геометрия / Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	Б	81,4	34,8	82,0	96,4	96,8
3	Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей / Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	84,5	47,8	85,2	96,0	96,8
4	Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей / Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	П	74,6	17,9	74,1	94,7	96,8
5	Алгебра / Уметь решать уравнения и неравенства	Б	93,6	62,6	96,8	99,3	100
6	Алгебра / Уметь выполнять вычисления и преобразования	Б	58,2	15,4	47,9	87,8	100
7	Функции / Уметь выполнять действия с функциями	Б	68,5	23,9	62,4	92,6	97,6
8	Алгебра / Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	П	57,4	14,3	49,4	83,7	95,2
9	Алгебра / Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	П	61,8	7,4	54,2	91,8	96,8
10	Функции / Уметь выполнять действия с функциями	П	60,7	9,3	50,4	93,5	100
11	Начала математического анализа / Уметь выполнять действия с функциями	П	49,6	5,3	35,9	84,9	97,6
12	Уравнения и неравенства / Уметь решать уравнения и неравенства	П	30,2	0	6,9	74,9	95,2
13	Геометрия / Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	П	1,2	0	0,1	1,5	29,9
14	Уравнения и неравенства / Уметь решать уравнения и неравенства	П	8,4	0	0,1	19,9	86,9
15	Алгебра / Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	П	6,1	0	0,3	13,2	74,6

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[4]				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т. б.	в группе от 61 до 80 т. б.	в группе от 81 до 100 т. б.
16	Геометрия / Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	П	0,8	0	0,02	0,8	25,9
17	Уравнения и неравенства / Уметь решать уравнения и неравенства	В	2,8	0	0,1	4,0	68,1
18	Алгебра / Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	В	12,3	2,3	7,9	21,0	43,3

Анализ усвоения элементов содержания, проверяемых заданиями экзаменационной работы

Таблица -14

Содержательные разделы школьного курса математики	Элементы содержания, вызвавшие наибольшие проблемы в выполнении заданий КИМ		Комментарий (сравнение с предыдущими годами) Указаны соответствующие задания 2022 года
	Элемент содержания	Номера заданий	
Алгебра	Вычисления и преобразования	№ 6 (базовый уровень) – 58,2%	Процент выполнения задания на вычисления и преобразования повысился в сравнении с 2022 годом: № 4 (базовый уровень) – 42,5%. В 2023 году в данном задании выражения были логарифмические, в отличие от 2022 года, кода в нем нужно было преобразовать тригонометрические выражения. Такое повышение процента выполнения, по нашему мнению, связано с разностью объёмов, необходимых школьникам по программе для изучения в процессе обучения: «Тригонометрия» гораздо объемнее, чем «Логарифмы».
Уравнения и неравенства	Тригонометрические уравнения	№ 12 (повышенный уровень) – 30,2%	Согласуется с результатами ЕГЭ 2022 года: № 12 (повышенный уровень) – 25,8%

	Показательные и логарифмические неравенства	№ 14 (повышенный уровень) – 8,4%	Процент выполнения задания на решение показательного неравенства понизился в сравнении с 2022 годом: № 14 (повышенный уровень) – 21,5 %. В 2022 году в данном задании было показательное неравенство, а в 2023 году – логарифмическое. Это и повлияло на процент выполнения. Сложность логарифмических неравенств выше, например, из-за того, что в них, как правило, не обойтись без рассмотрения ОДЗ, где многие участники и совершили ошибки в этом году.
	Использование свойств и графиков функций при решении уравнений	№ 17 (высокий уровень) – 2,8%	Согласуется с результатами ЕГЭ 2022 года: № 17 (высокий уровень) – 1,8%
Начала математического анализа	Исследование функций	№ 11 (повышенный уровень) – 49,6%	Процент выполнения задания на исследование функции значительно понизился в сравнении с 2022 годом: № 11 (повышенный уровень) – 73,3%. Разница процентов выполнения в 2022 и 2023 годах обусловлена разницей в сложности исследования: кубическая парабола (2022 год) и линейная комбинация многочлена и квадратного корня (2023 год).
Геометрия	Стереометрия	№ 13 (повышенный уровень) – 1,2%	Согласуется с заданием в 2022 году: № 13 (повышенный уровень) – 0,6% Низкие проценты выполнения стереометрических заданий повышенного уровня, к сожалению, традиционны для школьников Иркутской области.
	Планиметрия	Если с заданиями базового уровня (№ 3 – 69,8% в 2022 году, № 1 – 72,3% в 2023 году) обучающиеся справляются неплохо, то выполнение заданий повышенного уровня (№ 16 – 3% в 2022 году, № 16 – 0,8% в 2023 году) свидетельствует о наличии серьезных проблем с освоением этого раздела школьной математики.	
Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	С заданиями этого раздела № 3 (базовый уровень) – 84,5% и № 4 – 74,6% обучающиеся в целом справились. Для сравнения, в 2022 году результаты по соответствующим заданиям были следующими. № 2 (базовый уровень) – 92,6% и № 10 – 69,8% обучающихся в целом справились.		

	Снова заметим, что применение более сложных комбинаторных методов рассуждений в задании **№ 18 (высокий уровень)** – 12,3% показывает, что школьники успешно выполняют только стандартные типичные задания. Хотя отметим, что в 2022 году процент выполнения **задания № 18 (высокий уровень)** составлял всего 0,7. Однако более высокий процент в 2023 году обусловлен тем, что на пункт а) задания ответ был «да», и достаточно было привести подходящий пример. В 2022 же году на пункт а) был ответ «нет», и это требовало грамотного математического обоснования.

Подведем итоги анализа, представленного в таблице 15. В следующей таблице выделим элементы содержания и виды деятельности, которые можно условно считать успешно усвоенными / недостаточно усвоенными.

Таблица -15

Содержательные разделы школьного курса математики	Успешно усвоенные элементы содержания	Недостаточно усвоенные элементы содержания	Задания базового уровня (ниже 50% выполнения) и повышенного/высокого уровня (ниже 15% выполнения)
Алгебра	Числа, корни, степени, логарифмические выражения (базовый уровень) Преобразования выражений (базовый уровень)	Преобразования выражений (повышенный уровень)	№ 15 (повышенный уровень) – алгебра, комбинаторика. № 18 (высокий уровень) – алгебра и комбинаторика
Уравнения и неравенства	Уравнения и неравенства (базовый уровень)	Уравнения и неравенства (повышенный и высокий уровни)	№ 14 (повышенный уровень) – логарифмические неравенства. № 17 (высокий уровень) – уравнение с параметром
Функции / Начала математического анализа	Определение и график функции (базовый уровень)	Исследование функций (базовый и повышенный уровень)	
Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач (базовый уровень)		
Геометрия	Планиметрия (базовый уровень). Стереометрия (базовый уровень)	Планиметрия (повышенный уровень) Стереометрия (повышенный уровень)	№ 13 (повышенный уровень) – стереометрия, № 16 (повышенный уровень) – планиметрия

Анализ усвоения умений, навыков, видов деятельности, проверяемых заданиями экзаменационной работы

Таблица -16

Умения	Уровни успешно усвоенных навыков, видов деятельности (указаны номера соответствующих заданий в КИМ)	Уровни недостаточно усвоенных навыков, видов деятельности (указаны номера соответствующих заданий в КИМ)
Уметь решать уравнения и неравенства	Базовый уровень, № 5	Повышенный (№ 12 – справилось около 30% обучающихся, № 14 – справилось всего 8,4%) и высокий уровень (№ 17 – менее 3 % выполнения).
Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Базовый уровень, №№ 3, 4. Повышенный уровень, № 9.	Высокий уровень (№ 18 –12,3 % выполнения)
Уметь выполнять вычисления и преобразования		Базовый уровень (№ 6 – 58,2% обучающихся). Хотя и больше 50% выполнения, но ненамного.
Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами		Повышенный (№ 13 – 1,2% выполнения, № 16 – менее 1% выполнения)

Анализ выполнения заданий КИМ по группам участников ЕГЭ с разными уровнями подготовки

Таблица -17

Группа участников, не достигших минимального балла	Группа участников с результатами от минимального до 60 т. б.	Группа участников с результатами от 61 т. б. до 80 т. б.	Группа участников с результатами от 81 т. б. до 100 т. б.
Относительно успешно справились только с заданием №5 (базовый уровень – решение простейших уравнений) 62,6%. Близко к 50% (а именно 47,8%) выполнения здесь у задания № 3 (базовый уровень, простейшее задание по теории вероятностей). Все	Эта категория школьников не справилась с заданиями части 2 с развернутыми ответами. В части 1 трудность представили задания №№ 6, 8, 11 (алгебраические вычисления и преобразования, использование	Успешно справились с заданиями части 1. В части 2 эта группа школьников не справилась с заданиями высокого уровня сложности. Из заданий повышенного уровня особую трудность представили геометрические задания (№ 13 – 1,5%, № 16 – 0,8%). То, что с геометрическими заданиями второй части столь плохо справились даже представители этой категории (с довольно хорошими результатами), еще раз	Успешно справились со всеми заданиями части 1. В части 2 самыми трудными оказались задания № 13 (стереометрия) и № 16 (планиметрия). Процент выполнения по заданию № 13 повысился в 2 раза:

остальные показатели по заданиям базового уровня ниже 40%. По всем заданиям второй части у данной категории участников 0% выполнения. Исключение составляет задание № 18 (2,3%). Это обусловлен тем, что на пункт а) задания №18 ответ был «да», и достаточно было привести подходящий пример.	приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, исследование функций). Этот вывод согласуется с результатами прошлого года.	свидетельствует о плохо сформированных в целом геометрических знаниях. Проценты выполнения задания № 14 (показательное логарифмическое неравенство) значительно снизились по сравнению с 2022 годом: с 60 до 20. О причине мы уже писали выше. Так, в 2022 году в данном задании было показательное неравенство, а в 2023 году - логарифмическое. Это и повлияло на процент выполнения. Сложность логарифмических неравенств выше, например, из-за того, что в них, как правило, не обойтись без рассмотрения ОДЗ, где многие участники и совершили ошибки в этом году. Аналогичная ситуация по заданию № 15 (снижение с 60% до 13%) (экономическая задача). Задание в 2023 году можно считать сложнее, чем в 2022 году, за счет того, что в 2023 году период кредитования был равен 10 годам (а в 2022 году – всего три года), разбит на две части с различными условиями, которые нужно было согласовать. Изменение среднего процента выполнения этих заданий связано именно с этой категорией школьников. Первые две категории эти задания не делают почти никогда, последняя – почти всегда. Поэтому небольшое упрощение или усложнение их математической фабулы сказывается в основном на обучающихся среднего уровня, с 61-80 т. б.	№13 (30, а было 15). Процент выполнения по заданию № 16, наоборот, понизился более чем в 2 раза (26, было 54).

3.2.2. Содержательный анализ выполнения заданий КИМ

Из одиннадцати заданий первой части только с одним заданием справилось менее 50% участников. Это задание № 11 (49,6%).

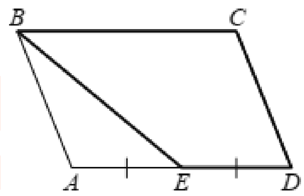
Из семи заданий второй части все задания в среднем решены менее чем 15% участников.

Рассмотрим задания первой части ЕГЭ нашего региона (из открытого варианта КИМ) и проанализируем, какие типичные ошибки сделали выпускники.

Указанные *типичные ошибки* относятся ко всем вариантам КИМ в целом.

Пример задания 1

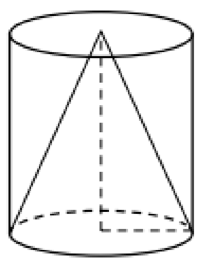
Площадь параллелограмма ABCD равна 24. Точка E – середина стороны AD. Найдите площадь трапеции BCDE.



Верный ответ 18 дали 73,8% выпускников. Наиболее распространённый неверный ответ 16 и 12 дали по 6% выпускников (2/3 и половина площади параллелограмма соответственно).

Пример задания 2

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 6. Найдите объём цилиндра.



Верный ответ 18 дали 80,8% выпускников. Наиболее распространённый неверный ответ 12 (7,1% выпускников) получается, если вместо объема цилиндра и конуса рассматривать площадь прямоугольника и треугольника, механически перенося задачу из пространства в плоскость. Второй по популярности неверный ответ – 2 (3,2% выпускников) – получается при делении на 3 вместо умножения.

Пример задания 3

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 10 спортсменов из Испании и 6 спортсменов из Бразилии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что одиннадцатым будет выступать спортсмен из Испании.

Верный ответ 0,4 дали всего 86,6% выпускников. Наиболее распространённый неверный ответ 0,44 (2,7% выпускников) получается при делении 11 (номер выступающего) на 25, что говорит о непонимании условия задачи. Второй по популярности неверный ответ – 0,2 (2,1% выпускников) – получается при делении 6 на 25, то есть вместо Испании взята Бразилия.

Пример задания 4

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в три первые мишени и не попадёт в последнюю.

Верный ответ 0,0729 дали 80,3% выпускников. Наиболее распространённый неверный ответ 0,729 (2,5% выпускников) получается, если рассматривать только три первые мишени.

Пример задания 5

Найдите корень уравнения $5^{2-x} = 125$.

Верный ответ – 1 дали 96,2% выпускников. Наиболее распространённые неверные ответы 5 (0,9% выпускников) и 1 (0,6% выпускников) получаются при ошибке в знаке при переходе к показателям $x - 2 = 3$ или при решении уравнения $2 - x = 3$.

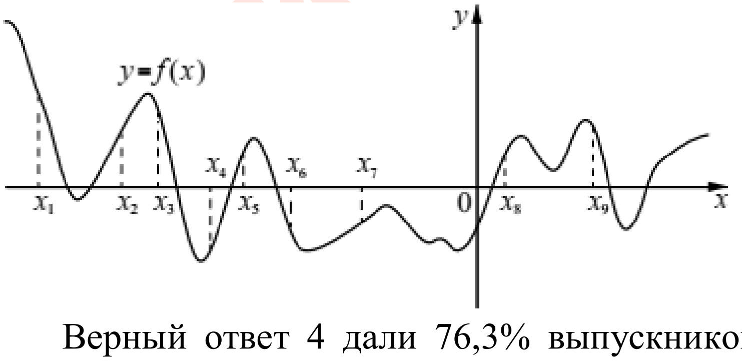
Пример задания 6

Найдите значение выражения $\frac{log_9 28}{log_9 7} + log_7 \frac{7}{4}$.

Верный ответ 2 дали 57,6% выпускников. Наиболее распространённый неверный ответ 1 (7,7% выпускников) получается при неверном применении свойств логарифмов (в частности, суммы логарифмов вместо перехода к новому основанию). Второй по популярности ответ 7 (5% выпускников) получается, если вообще откинуть логарифмы.

Пример задания 7

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. *На оси абсцисс отмечено девять точек:* $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. *Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции* $f(x)$ *отрицательна.*



Верный ответ 4 дали 76,3% выпускников. Наиболее распространённый неверный ответ 3 (19,9% выпускников) получается, если вместо точек, в которых производная отрицательна, выбрать точки, в которых функция отрицательна.

Пример задания 8

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 30$ *см. Расстояние* d_1 *от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 20 см до 40 см, а расстояние* d_2 *от линзы до экрана – в пределах от 160 см до 180 см.*

Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. *На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно разместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.*

Верный ответ 36 дали 62,3% выпускников. Наиболее распространённые неверные ответы 30 (6,0% выпускников), 40 (3,5% выпускников), 20 (2,7% выпускников) получаются при выписывании в ответ чисел, встречающихся в условии.

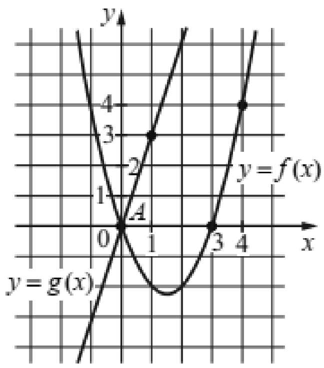
Пример задания 9

Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 104 литра она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба?

Верный ответ 8 дали 67,2% выпускников. Наиболее распространённые неверные ответы 13 (6,5% выпускников) (нашли производительность второй трубы вместо первой) и 2 (2,2% выпускников).

Пример задания 10

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ *и* $g(x) = kx$, *пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.*



Верный ответ 6 дали 59,5% выпускников. Наиболее распространённые неверные ответы 3 (3,6% выпускников) и 5 (3,3% выпускников), вероятно, такие ответы получились по графику (есть отмеченная точка с абсциссой 3) или при прикидке точки пересечения (абсцисса должна быть больше 4).

Пример задания 11

Найдите наибольшее значение функции $y = 7 + 12x - 4x\sqrt{x}$ *на отрезке [0; 12].*

Верный ответ 23 дали 51,1% выпускников. Наиболее распространённые неверные ответы 7 (13,4% выпускников) и 4 (4,4% выпускников). В первом случае значение функции в 0 (на краю промежутка), во втором случае – в ответ записана точка максимума вместо самого максимума.

Многие ошибки в первой части происходят от невнимательности, непонимания условия, незнания правил выполнения элементарных действий. Необходимо больше внимания уделять работе по пониманию прочитанного, изучению теории и применению на практике в простейших ситуациях.

Рассмотрим далее более подробно задания второй части ЕГЭ-2023 нашего региона (из открытого варианта). Выделим типичные ошибки выпускников по каждому из заданий 12-18, и приведём примеры решений некоторых выпускников нашего региона.

ЗАДАНИЕ № 12

а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x + \sqrt{2}\sin^2 x = 2\cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

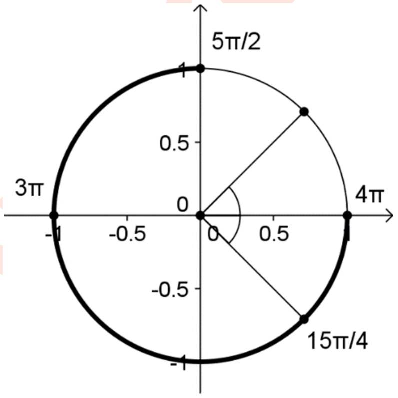
$$2\cos^3 x + \sqrt{2}(1 - \cos^2 x) - 2\cos x = 0.$$

Отсюда $2\cos x(\cos^2 x - 1) - \sqrt{2}(\cos^2 x - 1) = 0$, $\left(2\cos x - \sqrt{2}\right)(\cos^2 x - 1) = 0$.

Тогда $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\cos^2 x = 1$. Получаем $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$, или $x = \pi k, k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Получим числа: $3\pi; 4\pi$ и $4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$.



Ответ: а) $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; x = \pi k, k \in Z$.

б) $3\pi; 4\pi$ и $\frac{15\pi}{4}$.

Типичные ошибки

1) Ошибки в формулах решения простейших тригонометрических уравнений.

2) Потеря решений в переходе от квадрата функции к функции.

3) Ошибки в отборе корней.

ЗАДАНИЕ № 12 (ПРИМЕР 1)

№12) а) $2\cos^3 x + \sqrt{2}\sin^2 x = 2\cos x$

$2\cos^3 x + \sqrt{2}(1 - \cos^2 x) - 2\cos x = 0$

$2\cos^3 x + \sqrt{2} - \sqrt{2}\cos^2 x - 2\cos x = 0$

$\cos^2 x(2\cos x - \sqrt{2}) - (2\cos x - \sqrt{2}) = 0$

$(2\cos x - \sqrt{2})(\cos^2 x - 1) = 0$

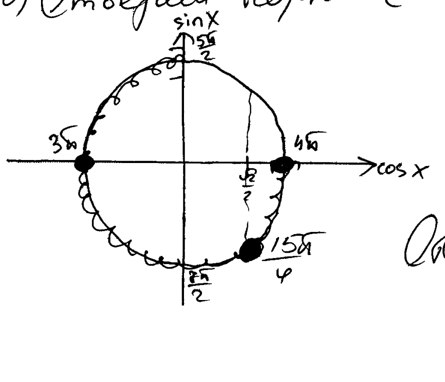
$(2\cos x - \sqrt{2})(\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos x = 1$ $\quad \cos x = -1$

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$ $\quad x = 2\pi n; n \in Z$ $\quad x = \pi + 2\pi n; n \in Z$

Получаем: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \pi n; n \in Z$

б) Отберем корни с помощью окружности:



Получим числа:

$x = 3\pi$

$x = 4\pi$

$x = 4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \pi n; n \in Z$

б) $3\pi; \frac{15\pi}{4}; 4\pi$.

Пример 1 демонстрирует верное решение задачи. Решено тригонометрическое уравнение, обоснован отбор корней на промежутке с помощью тригонометрической окружности.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 12 (ПРИМЕР 2)

12) а) $2\cos^3 x+\sqrt{2}\sin^2 x=2\cos x$

$2\cos^3 x+\sqrt{2}\sin^2 x-2\cos x=0$

$2\cos^3 x+\sqrt{2}-\sqrt{2}\cancel{\sin}\cos^2 x-2\cos x=0$

$2\cos^3 x-2\cos x-\sqrt{2}\cos^2 x+\sqrt{2}=0$

$2\cos x(\cos^2 x-1)-\sqrt{2}(\cos^2 x-1)=0$

$(\cos^2 x-1)(2\cos x-\sqrt{2})=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x-1=0\\ 2\cos x-\sqrt{2}=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cos^2 x=1\\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cos x=\pm 1\\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pi n;\ n\in Z\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z\end{array}\right.$

б) $\frac{5\pi}{2}\le \pi n\le 4\pi.$

$2,5\le n\le 4$

$n=3;\ 3\pi$

$n=4;\ 4\pi.$

$\frac{5\pi}{2}\le\frac{\pi}{4}+2\pi n\le 4\pi.$

$10\le 1+8n\le 16.$

$9\le 8n\le 15.$

$1\frac{1}{8}\le n\le 1\frac{7}{8}.$

$n=\varnothing$

$\frac{5\pi}{2}\le-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le 4\pi.$

$10\le -1+8n\le 16$

$11\le 8n\le 17.$

$1\frac{3}{8}\le n\le 2\frac{1}{8}.$

$n=2;\ \frac{15\pi}{4}.$

Ответ: а) $\pi n;\ n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z$ б) $3\pi;\ 4\pi;\ \frac{15\pi}{4}.$

Пример 2 демонстрирует верное решение задачи. Решено тригонометрическое уравнение, обоснован отбор корней на промежутке с помощью неравенств.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 12 (ПРИМЕР 3)

№12

а)

$2\cos^3 x=\sqrt{2}\sin^2 x+2\cos x$

$2\cos^3 x=\sqrt{2}(1-\cos^2 x)+2\cos x$

$2\cos^3 x+\sqrt{2}\cos^2 x-2\cos x-\sqrt{2}=0$

$2\cos^3 x-2\cos x+\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}=0$

$2\cos x(\cos^2 x-1)+\sqrt{2}(\cos^2 x-1)=0$

$(2\cos x+\sqrt{2})(\cos^2 x-1)=0$

$\cos x = \cancel{+\frac{\sqrt{2}}{2}}\ -\sqrt{2}$ или $\cos^2 x-1=0$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \cos^2 x = 1$

$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$ $\qquad \cos x=\pm 1$

$x=\pi k,\ k\in Z$

б) $\frac{7\pi}{2}\le \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k\le 5\pi \quad |\cdot\frac{4}{\pi}$

1\. $14\le -3+8k\le 20$ (Если $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$)

$17\le 8k\le 20$, для k нет целого числа. $\Rightarrow -\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ не входит в промежуток

2\. $11\le 8k\le 20$ (Если $+\frac{3\pi}{4}+2\pi k$)

$k=2$, В промежуток входит в следующем виде:

$\frac{3\pi}{4}+4\pi=\frac{19\pi}{4}$

3\. $\frac{7\pi}{2}\le \pi k\le 5\pi \quad |\cdot\frac{2}{\pi}$

$7\le 2k\le 10$

$k=4$
$k=5$ $\Rightarrow$ в промежуток входит в следующем виде: $4\pi;\ 5\pi.$

Ответ: а) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ +\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \pi k.$

б) $4\pi;\ \frac{19\pi}{4};\ 5\pi$

В примере 3 демонстрирует верное решение пункта а). При отборе корней на промежутке допущены вычислительные ошибки, не повлиявшие на ответ.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 12 (ПРИМЕР 4)

12) а) $2\cos^3 x + \sqrt{2}\sin^2 x = 2\cos x \;/ : \cos^3 x$

$$2 + \sqrt{2}\cdot tg^2 x\cdot\frac{1}{\cos x} = 2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cancel{2} + \sqrt{2}\cdot tg^2 x\cdot\frac{1}{\cos x} - 2tg^2 x - \cancel{2} = 0$$

$$\sqrt{2}\cdot tg^2 x\cdot\frac{1}{\cos x} - 2tg^2 x = 0$$

$$tg^2 x\left(\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cos x} - 2\right) = 0$$

$tg^2 x = 0$ или $\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cos x} - 2 = 0$

$tg x = 0$ $\qquad \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cos x} = 2$

$\underline{x = \pi n, n \in Z}$ $\qquad \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\underline{x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z}$

б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$\frac{5\pi}{2} \le \pi n \le 4\pi$

$2{,}5 \le n \le 4$

$\boxed{\begin{matrix} n=3 \\ n=4 \end{matrix}}$

$x_1 = 3\pi$

$x_2 = 4\pi$

$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi n \le 4\pi$

$\frac{9\pi}{4} \le 2\pi n \le \frac{15\pi}{4}$

$\frac{9}{8} \le n \le \frac{15}{8}$

$\boxed{n=1}$

$x_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \le 4\pi$

$\frac{11\pi}{4} \le 2\pi n \le \frac{17\pi}{4}$

$\frac{11}{8} \le n \le \frac{17}{8}$

$\boxed{n=2}$

$x_4 = -\frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{15\pi}{4}$

Ответ: а) $\left(x = \pi n;\ x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z$

б) $x_1 = 3\pi;\ x_2 = 4\pi;\ x_3 = \frac{9\pi}{4};\ x_4 = \frac{15\pi}{4}$

В примере 4 – верное решение 1-й части задачи. При отборе корней на промежутке выбрано значение $n = 1$, не удовлетворяющее промежутку $\left[\frac{9}{8}; \frac{15}{8}\right]$. Поэтому отбор корней выполнен неверно, появляется лишний корень.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 12 (ПРИМЕР 5)

№ 12

а) $2\cos^3 x = \sqrt{2}\sin^2 x + 2\cos x$

$2\cos x \cdot \cos^2 x = \sqrt{2}\sin^2 x + 2\cos x$

$2\cos x\,(1 - \sin^2 x) = \sqrt{2}\sin^2 x + 2\cos x$

$2\cos x - 2\cos x\sin^2 x = \sqrt{2}\sin^2 x + 2\cos x$

$\cancel{2\cos x} - 2\cos x\sin^2 x - \sqrt{2}\sin^2 x - \cancel{2\cos x} = 0$

$-2\cos x\sin^2 x - \sqrt{2}\sin^2 x = 0.$

$2\cos x\sin^2 x + \sqrt{2}\sin^2 x = 0.$

$\sin^2 x\,(2\cos x + \sqrt{2}) = 0$

$\sin^2 x = 0$

$x = \pi n;\ n \in \mathbb{Z}.$

$2\cos x + \sqrt{2} = 0.$

$2\cos x = -\sqrt{2}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$x = \left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}.$

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}.$

б). $\left[\frac{7\pi}{2};\ 5\pi\right].$

$x = \pi n;\ n \in \mathbb{Z}.$

$n = 3 \Rightarrow x = 3\pi$ –

$n = 4 \Rightarrow x = 4\pi.$

$n = 5 \Rightarrow x = 5\pi.$

$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}.$

$k = 2 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{-3\pi + 16\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$ –

$k = 3 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + 6\pi = \frac{-3\pi + 24\pi}{4} = \frac{22\pi}{4}$ –

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi + 8\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$

$n = 2 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{3\pi + 16\pi}{4} = \frac{19\pi}{4}.$

$n = 3 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 6\pi = \frac{3\pi + 24\pi}{4} = \frac{27\pi}{4}$ –

Ответ: а) $x = \pi n;\ n \in \mathbb{Z}.$

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}.$

б) $\left\{4\pi;\ \frac{19\pi}{4};\ 5\pi\right\}$

В примере 5 – верное решение 1-й части задачи. При отборе корней на промежутке допущена вычислительная ошибка – 3π + 24π = 22π.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 12 (ПРИМЕР 6)

№ 12

а) $2\cos^3 x+\sqrt{2}\sin^2 x=2\cos x$

$2\cos^3 x+\sqrt{2}(1-\cos^2 x)=2\cos x$

$2\cos^3 x+\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos^2 x=2\cos x$ $\qquad 2\cos^3 x-2\cos x+\sqrt{2}-\cos^2 x=0$

$2\cos x(\cos^2 x-1)-\sqrt{2}(\cos^2 x-1)=0$

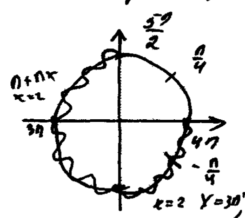
$(2\cos x-\sqrt{2})(\cos^2 x-1)=0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}2\cos x-\sqrt{2}=0\\ \cos^2 x-1=0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2\cos x=\sqrt{2}\\ \cos^2 x=1\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=\pm 1\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k;\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z\\ \cos x=1 \Rightarrow x=2\pi k,\ k\in Z\\ \cos x=-1 \Rightarrow x=\pi+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $2\pi k$; $\pi+\pi k$, $k\in Z$.

б) Проведём отбор корней с помощью числовой окруж.



$\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$x=\frac{\pi}{4}+2\pi k \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$x=3\pi \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$k=2\ x=4\pi$ $\qquad x=4\pi \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$k=2\ x=-\frac{\pi}{4}+2\cdot\pi\cdot 2 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+4\pi \Rightarrow x=\frac{15\pi}{4}$; $x=\frac{15\pi}{4}\in\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Ответ: $x=3\pi$; $x=4\pi$; $x=\frac{15\pi}{4}$.

В примере 6 – неверное решение простейшего тригонометрического уравнения cos$x$ = – 1. Это не вычислительная ошибка.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 12 (ПРИМЕР 7)

12 а) $2\cos^3 x = \sqrt{2}\sin^2 x + 2\cos x$

$$2\cos^3 x - \sqrt{2}(1-\cos^2 x) - 2\cos x = 0$$

$$2\cos^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x - 2\cos x - \sqrt{2} = 0$$

$$\cos^2 x\cdot(2\cos x + \sqrt{2}) - (2\cos x + \sqrt{2}) = 0$$

$$(\cos^2 x - 1)(2\cos x + \sqrt{2}) = 0$$

$\cos^2 x = 1$ или $2\cos x = -\sqrt{2}$

$\cos x = 1$ $\qquad$ $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

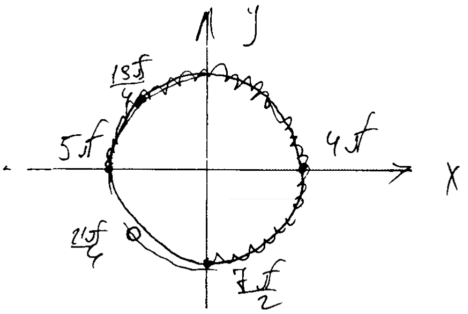
$x = 2\pi k,\ k\in Z$

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n\in Z \\ -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi m,\ m\in Z \end{array}\right.$$

$$x = \left[\begin{array}{l} \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in Z \\ -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi m,\ m\in Z \end{array}\right.$$

$$x = \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in Z \\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m\in Z \end{array}\right.$$

б)



$$5\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{10\pi - \pi}{4} = \frac{19\pi}{4}$$

Ответ: а) $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in Z$; $x_3 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m\in Z$

б) $x_1 = 5\pi$, $x_2 = 4\pi$, $x_3 = \frac{19\pi}{4}$

В примере 7 – неверный переход от уравнения $\cos^2 x = 1$ к уравнению $\cos x = 1$. Это не вычислительная ошибка.

Оценка эксперта: 0 баллов.

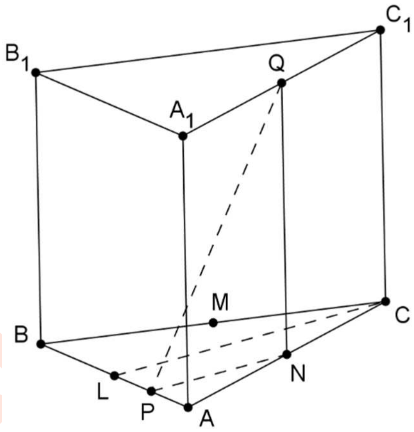
При наличии невычислительной ошибки решение задания № 12 по критериям должно быть оценено в 0 баллов. Подчеркнем, что обучающиеся, учителя, репетиторы, несмотря на регулярные разъяснения региональных предметных комиссий, часто неверно понимают трактовку термина «вычислительная ошибка». К вычислительным ошибкам относятся только ошибки в выполнении основных арифметических действий.

ЗАДАНИЕ № 13

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q – середина ребра A_1C_1. Через середину M ребра BC провели плоскость α, перпендикулярную отрезку PQ.

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру AB.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ, считая от точки P, если известно, что $AB = AA_1$, $AB : BC = 2 : 5$.

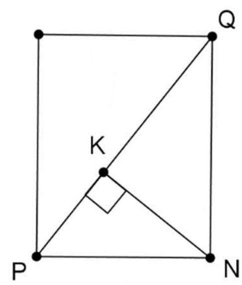


Решение

Способ 1. Геометрический

а) Пусть CL – высота треугольника ABC. Тогда CL и медиана. Так как $AP : PB = 1 : 3$, а $AL : LB = 1 : 1$, то имеем $LP : AP = 1 : 1$. Пусть N – середина AC. Тогда PN – средняя линия треугольника ALC. Тогда $PN \perp AB$.

Так как призма прямая, то QN – перпендикуляр к плоскости ABC. По теореме о трех перпендикулярах $PQ \perp AB$. Так как MN – средняя линия треугольника ABC, то, значит, она параллельна AB и перпендикулярна PQ. Опустим из точки M перпендикуляр MK на PQ. Тогда плоскость $(MKN) \perp PQ$ (по признаку перпендикулярности примой и плоскости), а, значит, совпадает с α. Таким образом, плоскость α содержит прямую MN, параллельную AB, и не содержит AB. Значит, AB параллельна α (по признаку параллельности прямой и плоскости).

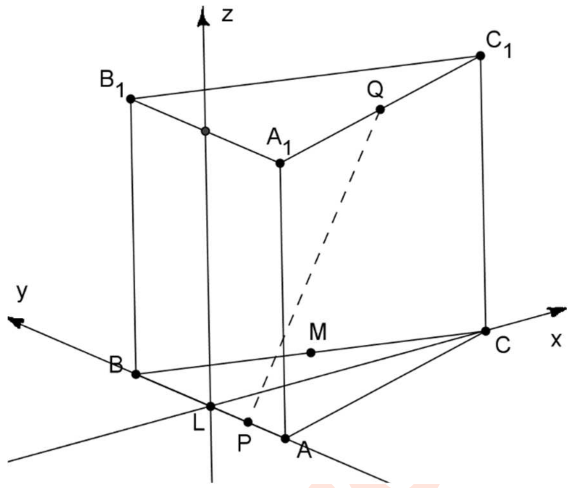


б) Пусть α пересекает PQ в точке K. Тогда в прямоугольном треугольнике PNQ отрезок NK – высота. Тогда по свойству проекций катетов на гипотенузу $PK = PN^2 : PQ$, $KQ = QN^2 : PQ$. Отсюда $PK : KQ = PN^2 : QN^2$.

Пусть $AB = AA_1 = QN = 2x$. Тогда $BC = AC = 5x$. По теореме Пифагора для треугольника ALC получаем $LC^2 = AC^2 - AL^2$, $LC = \sqrt{25x^2 - x^2} = 2x\sqrt{6}$. По теореме о средней линии треугольника $PN = x\sqrt{6}$. Тогда $PK : KQ = 6 : 4 = 3 : 2$.

Ответ: б) 3 : 2.

Способ 2. Координатный



Введём систему координат. Проведём высоту CL в треугольнике ABC. Пусть L – начало координат, LC – ось Ox, LB – ось Oy, перпендикулярная им прямая – ось Oz. Пусть $CL = 2h$, $AB = 4a$, $AA_1 = b$. Найдём координаты вершин:

A (0; – 2a; 0); B (0; 2a; 0); C (2h; 0; 0); A_1 (0; – 2a; b); B_1 (0; 2a; b); C_1 (2h; 0; b).

Найдём координаты точек P, Q и M: P (0; – a; 0) (так как $AP : PB$ =1 : 3); Q (h; – a; b) (так как Q – середина ребра A_1C_1); M (h; a; 0) (так как M– середина ребра BC).

а) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$ (от координат конца вычитаем координаты начала): $\overrightarrow{PQ}(h;\ 0;\ b)$. Найдем уравнение плоскости α, перпендикулярной вектору $\overrightarrow{PQ}$ и проходящей через точку M: $h(x - h) + 0(y - a) + b(z - 0) = 0$, или $hx + bz - h^2 = 0$. Так как коэффициент при y равен 0, а свободный член не равен 0, то плоскость α параллельна оси Oy, которая совпадает с прямой AB.

б) Так как $AB = AA_1$, то b = 4a. Так как $AB : BC = 2 : 5$, то BC = AC = 10a. Тогда по теореме Пифагора для треугольника ALC получаем $LC^2 = AC^2 - AL^2$, $LC = \sqrt{100a^2 - 4a^2} = 4a\sqrt{6}$; $h = 2a\sqrt{6}$. Тогда уравнение плоскости α: $2ax\sqrt{6} + 4az - 24a^2 = 0$, или $x\sqrt{6} + 2z - 12a = 0$. Зададим уравнение прямой PQ параметрически: $x = ht = 2at\sqrt{6}$; $y = -a$; $z = bt = 4at$. Причём точка P получается при $t = 0$, точка Q при $t = 1$. Найдем координаты точки K – пересечения плоскости α и прямой PQ, подставив x, z в уравнение плоскости: $12at + 8at - 12a = 0$. Отсюда $t = 0{,}6$. Значит, $PK : KQ = 0{,}6 : (1 - 0{,}6)$ $PK : KQ = 0{,}6 : 0{,}4 = 3 : 2$.

Ответ: б) 3 : 2.

Типичные ошибки

1) Основная ошибка – утверждение, что если прямая параллельна прямой в плоскости, то она параллельна плоскости. В этой ситуации прямая может оказаться в плоскости.

2) Вычислительные ошибки.

Заметим, что к выполнению задания № 13 приступали очень немногие выпускники, что говорит о недостаточном уровне преподавания геометрии в школе. Это же касается и задачи 16.

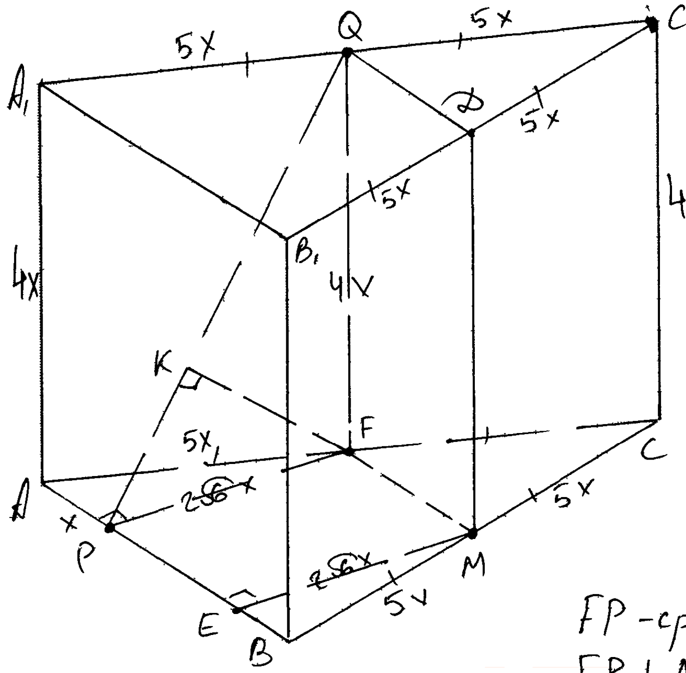
ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 8)

№13 а) Пусть т. F – пр-ия т. Q на (ACB), тогда AF = FC

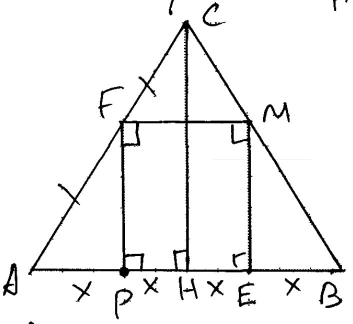
⇒ MF – ср. линия $\triangle ABC$ ⇒ $MF \parallel AB$

$QF \perp (ABC)$ ⇒ PF – проекция PQ на (ABC)

$\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$; M и Q – середины BC и A_1C_1 соотв.



Рассмотрим $\triangle ABC$ р/б:



Пусть $AP = x$, $PB = 3x$

CH – высота и медиана

$PH = AH - AP = 2x - x = x$

FP – ср. л. в $\triangle ACH$ ⇒ $CH \parallel FP$,

$FP \perp AB$; Пусть $ME \perp AB$, тогда

$ME \parallel CH \parallel FP$; $\left.\begin{array}{l} FP \perp AB \\ ME \perp AB \\ ME = FP = \frac{1}{2}CH \text{ (ср. л.)} \end{array}\right\}$ ⇒ FMEP – прямоугольник ⇒ $MF \perp PF$

Т.к. PF – пр-ия PQ на (ABC) ⇒ $MF \perp PQ$ ⇒ $MF \in \alpha$

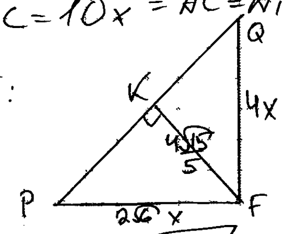
$MF \in \alpha$ и $MF \parallel AB$ ⇒ $AB \parallel \alpha$, чтд.

б) $\alpha \perp PQ$; Пусть $FK \perp PQ$, $\frac{PK}{KQ}$ – ? $\triangle APF$: $PF = \sqrt{24x^2} = 2\sqrt{6}\,x$

$AB = 4x = AA_1 = CC_1 = BB_1$

$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{5} = \frac{4x}{BC}$ ⇒ $BC = 10x = AC = A_1C_1 = B_1C_1 = QF$

Рассмотрим $\triangle PQF$:



$PQ = \sqrt{40x^2} = 2\sqrt{10}\,x$

$KF = \frac{4x \cdot 2\sqrt{6}\,x}{2\sqrt{10}\,x} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{10}}x = \frac{4\sqrt{15}}{5}x$

$\triangle PKF$: $PK = \sqrt{24x^2 - \frac{16\cdot 15}{25}x^2} = \sqrt{\frac{72}{5}x^2} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x = \frac{6\sqrt{10}}{5}x$

$\triangle QFK$: $QK = \sqrt{16x^2 - \frac{16\cdot 15}{25}x^2} = \frac{4\sqrt{10}}{5}x$ Ответ: 3:2

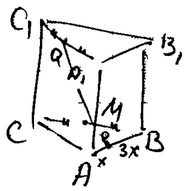
Получаем: $\frac{PK}{QK} = \left(\frac{6\sqrt{10}}{5}x\right) : \left(\frac{4\sqrt{10}}{5}x\right) = 3:2$

Пример 8 демонстрирует верное решение задачи. Доказана параллельность прямой и плоскости, найдено нужное соотношение отрезков.

Оценка эксперта: 3 балла.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 9)

№13.

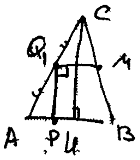


Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $AC = CB$, $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$

$A_1Q = QC_1$ $\quad BM = CM$ $\quad M \in \alpha$ $\quad \alpha \perp QP$ $\quad \alpha \cap QP = O$

Док-ть. $\alpha \parallel AB$. $\quad$ Найти: $\frac{PO}{OQ} = ?$ при $AA_1 = AB$ $\quad \frac{AB}{BC} = \frac{2}{5}$

Док-во:



Q_1P – проекция QP на ABC. Пусть $AP = x$, $PB = 3x$

CH – выс. т.к. $AC = CB$ => CH – мед. => $AH = 2x$ => $\frac{AP}{AH} = \frac{1}{2}$

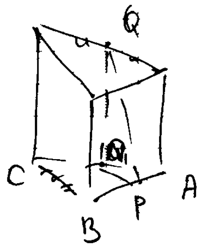
т.к. $AQ_1 = Q_1C$ (по постр.), $AP = PH$ => $Q_1P \parallel CH$ => $Q_1P \perp AB$

т.к. α проходит через M и $\alpha \perp QP$ => через M будет проходить $MN \perp Q_1P$

т.к. $MQ_1 \perp Q_1P$, а $Q_1P \perp AB$ => $MQ_1 \parallel AB$

т.к. $MQ_1 \in \alpha$ => $\alpha \parallel AB$ ▲

б)

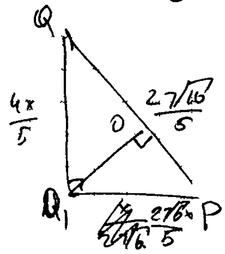


Проведём $QQ_1 \parallel AA_1$, $\triangle QQ_1P$ – прямоуг (прям. призма)

Пусть $CQ_1 = x$ тогда $BC = CA = 2CQ_1 = 2x$, $AB = \frac{BC \cdot 2}{5} = \frac{4x}{5}$

$AP = \frac{AB}{4} = \frac{x}{5}$

решим $\triangle QQ_1P$.



$QQ_1 = AA_1 = AB = \frac{4x}{5}$

$Q_1P = \sqrt{Q_1A^2 - AP^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{25}} = \frac{2\sqrt{6}x}{5}$

$QP = \sqrt{QQ_1^2 + Q_1P^2} = \sqrt{\frac{16x^2}{25} + \frac{24x^2}{25}} = \frac{\sqrt{40}x}{5} = \frac{2\sqrt{10}x}{5}$

$\cos P = \frac{Q_1P}{QP} = \frac{2\sqrt{6}x \cdot 5}{5 \cdot 2\sqrt{10}x} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$ $\qquad$ $\cos Q = \frac{QQ_1}{QP} = \frac{4x \cdot 5}{5 \cdot 2\sqrt{10}x} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

$\cos P = \frac{PO}{Q_1P} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$ => $PO = \frac{2\sqrt{6} \cdot 5}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{6}x} = \frac{5}{2\sqrt{10}}$ $\qquad$ $\cos Q = \frac{QO}{QQ_1} = \frac{2}{\sqrt{10}}$ =>

=> $QO = \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{10} \cdot 4x} = \frac{5}{2x\sqrt{10}}$

$\frac{OP}{QO} = \frac{5 \cdot 2x\sqrt{10}}{2x\sqrt{10} \cdot 5} = \frac{1}{1}$

Ответ: $\frac{OP}{QO} = \frac{1}{1}$.

Пример 9 демонстрирует верное решение пункта а). При вычислении длины *PO* допущена ошибка: при преобразованиях вместо деления взято умножение. Ошибка может быть отнесена к вычислительным, всё остальное в решении верно.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 10)

№ 13

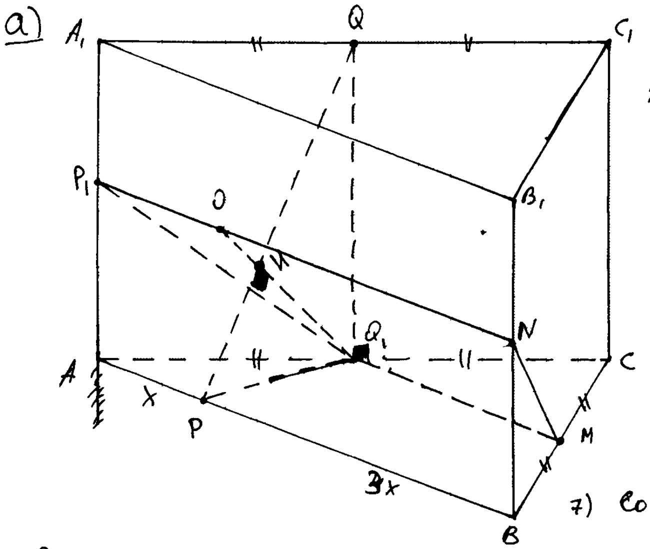
$\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$ а) Док-ть $\alpha \parallel AB$

$A_1Q = C_1Q$ б) $\frac{PH}{HQ} = ?$, если $AB = AA_1$; $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{5}$

$BM = CM$

$\alpha \perp PQ$

а)



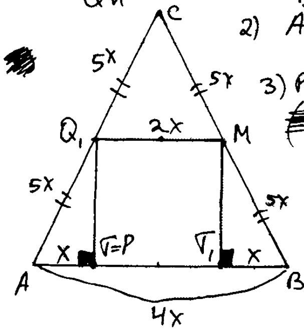
Построим плоскость α:

1) $QQ_1 \perp AC \Rightarrow AQ_1 = Q_1C$
2) $Q_1H \perp PQ \Rightarrow Q_1H \in \alpha$
3) Проведём Q_1M – средняя линия $\triangle ABC$
$\Downarrow$
$Q_1M \parallel AB$ (по свойству средней линии в треугольнике)
4) $\left.\begin{matrix} Q_1M \in \alpha \\ Q_1M \parallel AB \\ AB \notin \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \parallel \alpha$ (по признаку параллельности прямой и плоскости)
5) Продолжим Q_1H до пересечения в точке O с плоскостью (AA_1B_1)
6) Через точку O проведём прямую $P_1N \parallel AB$ (т.к. $AB \parallel \alpha$)
7) Соединяем MN и P_1Q_1

В п.4 во время построения плоскости α было доказано, что $AB \parallel \alpha$

ч.т.д.

б) $\frac{PH}{QH} = ?$



1) $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{5}$ $\frac{4x}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = \frac{5 \cdot 4x}{2} = 10x$

2) $AA_1 = AB = 4x$ (по условию)

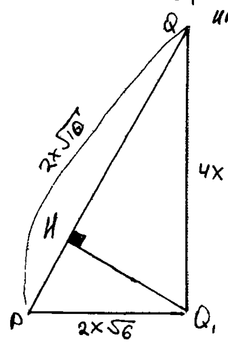
3) Рассмотри равнобедренную трапецию AQ_1MB:
~~$\frac{AB - ...}{2} - x = AP \Rightarrow$ точки T и P совпадают~~

- Проведём Q_1T и $MT_1 \perp AB \Rightarrow TT_1 = Q_1M = 2x$
- $AT = T_1B = \frac{4x - 2x}{2} = x$
- $AT = AP = x \Rightarrow$ точки T и P совпадают $\Rightarrow PQ_1 \perp AB$

$\Downarrow$
$\triangle APQ_1$ – прямоугольный

4) Рассмотрим $\triangle APQ$ – прямоуг.:
$AC = BC$ (т.к $\triangle ABC$ – равнобедренный)
$AQ_1 = Q_1C = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 10x = 5x$

$Q_1P = \sqrt{25x^2 - x^2} = \sqrt{24x^2} = 2x\sqrt{6}$



5) $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма $\Rightarrow AA_1 = QQ_1 = 4x$

См. пункт 6 на листе 5!

6) $PQ=\sqrt{16x^2+24x^2}=\sqrt{40x^2}=2x\sqrt{10}$

7) $2x\sqrt{6}=\sqrt{PH\cdot 2x\sqrt{10}}$
$24x^2=PH\cdot 2x\sqrt{10}$
$PH=\frac{24x^2}{2x\sqrt{10}}=\frac{12x\sqrt{10}}{10}=\frac{6x\sqrt{10}}{5}$

8) $4x=\sqrt{QH\cdot 2x\sqrt{10}}$
$16x^2=QH\cdot 2x\sqrt{10}$
$QH=\frac{16x^2}{2x\sqrt{10}}=\frac{8x\sqrt{10}}{10}=\frac{4x\sqrt{10}}{5}$

9) $\frac{PH}{HQ}=\frac{6x\sqrt{10}}{5}:\frac{4x\sqrt{10}}{5}=\frac{6x\sqrt{10}\cdot 5}{5\cdot 4x\sqrt{10}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1,5$

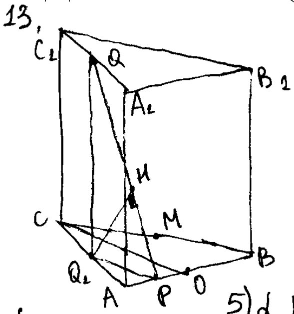
Ответ: б) $\frac{PH}{HQ}=1,5$

В примере 10 нет достаточного обоснования пункта а). Пункт б) решён с использованием найденных в пункте а) соотношений, поэтому решение может быть оценено в 1 балл.

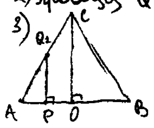
Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 11)

13.

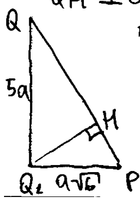


а) Рисую каркасное изображение призмы.
1) Призма прямая => отрезок, не являющийся её высотой не перпендикулярен плоскости её основания => $PQ \not\perp (ABC)$
2) Проведу $QQ_1 \perp (ABC) \Rightarrow QQ_1 \parallel AA_1$; O – середина AB, Q_1 – середина AC

3) 

$Q_1P \parallel CO$ т.к. $\triangle AQ_1P \sim \triangle ACO$ ($\angle A$-общий и $\frac{AQ_1}{AC}=\frac{AP}{AO}$)
$CO \perp AB$ т.к. AB-основание равнобед. $\triangle ABC \Rightarrow Q_1P \perp AB$
4) QP – проекция QP на (ABC), $QQ_1 \perp Q_1P \Rightarrow$ по теореме о 3-х перпендикулярах $PQ \perp AB$
5) $\alpha \perp PQ$, $PQ \perp AB \Rightarrow \alpha \parallel AB$ ч.т.д.

б) Пусть H – точка пересечения α и PQ. Точка $Q_1 \in \alpha$ т.к. $Q_1M \parallel AB$ и $Q_1M \in (ABC)$. $Q_1H \in \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow QH \perp Q_1H \Rightarrow PQ \perp Q_1H$.



$AC=CB=5a$ $AB=2a$ $AO=a \Rightarrow CO=2a\sqrt{6}$ (по т. Пифагора), а $Q_1P=a\sqrt{6}=0,5\,CO$ $QQ_1=AA_1=5a$
по т. Пифагора $QP=a\sqrt{31}$
$\cos\angle Q_1QP=\frac{5a}{a\sqrt{31}}=\frac{5}{\sqrt{31}}$; $\cos\angle QPQ_1=\frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{31}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{31}}$ $\frac{PH}{QH}=\frac{6a\cdot\sqrt{31}}{\sqrt{31}\cdot 25a}=\frac{6}{25}$
$\frac{HP}{Q_1P}=\cos\angle QPQ_1=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{31}} \Rightarrow HP=\frac{6a}{\sqrt{31}}$; $\frac{QH}{QQ_1}=\cos\angle Q_1QP=\frac{5}{\sqrt{31}} \Rightarrow QH=\frac{25a}{\sqrt{31}}$ Ответ: $\frac{6}{25}$.

В примере 11 в пункте а) необоснованный вывод о параллельности прямой *AB* и плоскости α (*AB* может лежать в α). В пункте б) неверное условие: вместо $AB = AA_1$ взято $AC = AA_1$. Таким образом, решается другая задача. Ошибка не может считаться вычислительной.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 14

Решите неравенство $\left(\log^2_{0,25}(x+3)-\log_4(x^2+6x+9)+1\right)\cdot\log_4(x+2)\le 0.$

Решение

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3>0; \\ x^2+6x+9>0; \\ x+2>0. \end{cases}$$

Отсюда $x > -2$.

По свойствам логарифмов на ОДЗ

$\log_4(x^2 + 6x + 9) = \log_4(x + 3)^2 = 2\log_4(x + 3)$.

$\log^2_{0,25}(x+3) = (\log_{0,25}(x+3))^2 = (-\log_4(x+3))^2 = (\log_4(x+3))^2$.

Тогда получаем $(\log_4(x + 3) - 1)^2 \cdot \log_4(x + 2) \le 0$.

Так как $(\log_4(x + 3) - 1)^2 \ge 0$, то

либо $\log_4(x + 3) - 1 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = 1$,

либо $(\log_4(x + 3) - 1)^2 > 0$, $\log_4(x + 2) \le 0 \Leftrightarrow 0 < x + 2 \le 1 \Leftrightarrow -2 < x \le -1$. С учётом ОДЗ получаем ответ.

Ответ: $(-2; -1] \cup \{1\}$.

Типичные ошибки

1) Неверная расстановка знаков при применении метода интервалов.

2) Необоснованный переход от неравенства $AB \le 0$ к совокупности $A \le 0$ или $B \le 0$.

3) Неверные преобразования квадратов логарифмов.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 12)

№14 $(\log^2_{0,25}(x+3) - \log_4(x^2+6x+9) + 1) \cdot \log_4(x+2) \le 0$

Условие:

$\begin{cases} x+3>0 \\ x+2>0 \\ x^2+6x+9>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3 \\ x>-2 \\ (x+3)^2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3 \\ x>-2 \\ x\ne-3 \end{cases} \Leftrightarrow x>-2$ продолжение на след. стр.

• $\log^2_{0,25}(x+3) = (\log_{0,25}(x+3))^2 = (\log_{4^{-1}}(x+3))^2 = (-\log_4(x+3))^2 = \log^2_4(x+3)$

• $\log_4(x^2+6x+9) = \log_4(x+3)^2 = 2\log_4|x+3|$, но по условию $x+3>0 \Rightarrow$

$2\log_4|x+3| = 2\log_4(x+3)$

$(\log^2_4(x+3) - 2\log_4(x+3) + 1)\log_4(x+2) \le 0$

$(\log_4(x+3)-1)^2 \log_4(x+2) \le 0$

Первый множитель в квадрате, значит он не влияет на знак $\Rightarrow$ всегда положителен, но может равняться нулю т.к. неравенство не строгое. Решим это отдельно

$\log_4(x+3) - 1 = 0$

$\log_4(x+3) = \log_4 4$

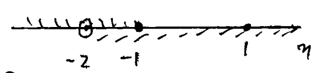
$x+3=4 \Rightarrow x=1$

$\log_4(x+2) \le 0$

$\log_4(x+2) \le \log_4 1$

$x+2 \le 1$

$x \le -1$, учтем условие $\Rightarrow$



$\Rightarrow x \in (-2; -1] \cup \{1\}$

Ответ: $(-2; -1] \cup \{1\}$

Пример 12 демонстрирует верное решение задачи. Обоснованно рассмотрены два случая для знаков множителей и получен верный ответ.

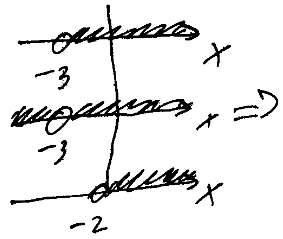
Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 13)

$(\log^2_{0,25}(x+3)-\log_4(x^2+6x+9)+1)\cdot\log_4(x+2)\le 0$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+3>0 \\ x^2+6x+9>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ (x+3)^2>0 \\ x>-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\ne-3 \\ x>-2 \end{cases} \Rightarrow$



$\Rightarrow x\in(-2;+\infty)$

$(\log^2_4(x+3)-\log_4((x+3)^2)+1)\cdot\log_4(x+2)\le 0$

$\log^2_4(x+3)-2\log_4(x+3)+1=0$ $\qquad$ $\log_4(x+2)=0$

пусть $t=\log_4(x+3)$ $\qquad$ $x+2=1$

$t^2-2t+1=0$ $\qquad$ $x=-1$

$(t-1)^2=0$

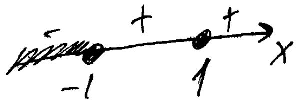
$t=1$

$\log_4(x+3)=1$

$x+3=4$

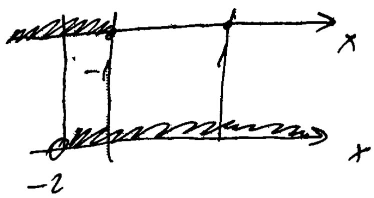
$x=1$

$(x-1)^2(x+1)\le 0$



$\Rightarrow x\in(-\infty;-1]\cup\{1\}$

Пересечем с ОДЗ:



Ответ: $x\in(-2;-1]\cup\{1\}$

Пример 13 демонстрирует верное решение задачи. Обоснованно применён метод интервалов и получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 14)

$14)\left(\log^2_{0,25}(x+3)-\log_4(x^2+6x+9)+1\right)\cdot\log_4(x+2)\le 0.$

$\left(\log^2_4(x+3)-\log_4(x^2+6x+9)+1\right)\cdot\log_4(x+2)\le 0.$

ОДЗ: $\begin{cases}x+3>0\\x^2+6x+9>0\\x+2>0\end{cases}$ $\begin{cases}x>-3\\(x+3)^2>0\\x>-2\end{cases}$ $\begin{cases}x>-2\\x\ne-3\end{cases}$

Значит x может принадлежать только $(-2;+\infty)$.

$(\log^2_4(x+3)-2\log_4(x+3)+1)\cdot\log_4(x+2)\le 0$, т.к $x+3>0$.

$(\log_4(x+3)-1)^2\cdot\log_4(x+2)\le 0.$

$\log^2_4\left(\frac{x+3}{4}\right)\cdot\log_4(x+2)\le 0.$; $\left(\log_4\left(\frac{x+3}{4}\right)-0\right)^2\cdot(\log_4(x+2)-0)\le 0.$

Воспользуемся методом рационализации:

$(4-1)^2\cdot\left(\frac{x+3}{4}-1\right)^2\cdot(4-1)(x+2-1)\le 0.$ $|:(4-1)^2$, т.к $(4-1)^2>0.$

$\left(\frac{x+3}{4}-\frac{4}{4}\right)^2\cdot(x+1)\le 0.$; $\left(\frac{x-1}{4}\right)^2\cdot(x+1)\le 0.$

Зануления: $x=1$; $x=-1$; Метод интервалов:

-1 0 1

С учётом ограничений:

-1

-2

Ответ: $x\in(-2;-1]$.

Пример 14 демонстрирует ошибочное решение задачи. При применении метода интервалов потеряна изолированная точка 1. Это соответствует критерию на 1 балл.

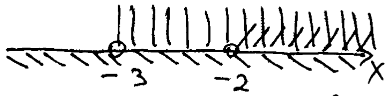
Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 15)

№14 $(\log^2_{0,25}(x+3)-\log_4(x^2+6x+9)+1)\cdot\log_4(x+2)\le 0$

ОДЗ: $\begin{cases}x+3>0\\x+2>0\\x^2+6x+9>0\,(*)\end{cases}$ $(*)\ x^2+6x+9=0$, $D=36-36=0$, $x=\frac{-6}{2}=-3$ $\begin{cases}x>-3\\x>-2\\x\in(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)\end{cases}$

-3



ОДЗ: $x \in (-2; +\infty)$

$$\left(\log^2_{4^{-1}}(x+3) - \log_4 (x+3)^2 + 1\right) \cdot \log_4 (x+2) \le 0$$

$$\left(\log^2_4 (x+3) - 2\log_4 |x+3| + 1\right) \cdot \log_4 (x+2) \le 0$$

1) $\log^2_4 (x+3) - 2\log_4 |x+3| + 1 = 0$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{если } x \ge -3 \\ -(x+3), & \text{если } x < -3 \end{cases}$$

Так как по ОДЗ $x \in (-2; +\infty)$, то $|x+3| = x+3$

$\log^2_4 (x+3) - 2\log_4 (x+3) + 1 = 0$ $\boxed{\log_4 (x+3) = t}$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$D = 4 - 4 = 0$

$t = \frac{2}{2} = 1$

$\log_4 (x+3) = 1$

$\log_4 (x+3) = \log_4 4$

$x + 3 = 4$

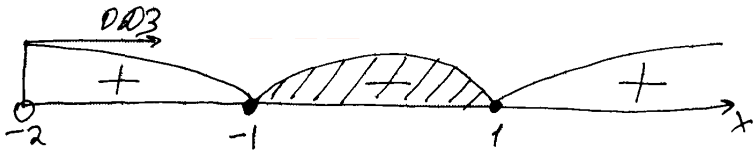
$x = 1$

2) $\log_4 (x+2) = 0$

$\log_4 (x+2) = \log_4 1$

$x + 2 = 1$

$x = -1$



Ответ: $x \in [-1; 1]$

В примере 15 неверная расстановка знаков при решении методом интервалов (не учтено повторение знака для квадрата) и получен неверный ответ.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 16)

$\boxed{14}$ $\left(\lg^2_{0,1}(x+1) - \lg(x^2+2x+1) + 1\right) \cdot \lg(x-3) \le 0$

ОДЗ: $x > 3$, $x > -1$

$\log^2_{\frac{1}{10}}(x+1) - \lg((x+1)(x+1)) + 1 \le 0$

$\lg(x-3) \le 0$

$x - 3 \le 1$

$x \le 4$

$-\lg^2(x+1) - \lg(x+1) - \lg(x+1) + 1 \le 0$

$-\lg^2(x+1) - 2\lg(x+1) + 1 \le 0$

$\lg(x+1) = t$

$-t^2 - 2t + 1 \le 0 \,|\, \cdot(-1)$

$t^2 + 2t - 1 \ge 0$ переходим к уравнению, $t^2 + 2t - 1 = 0$,

$\sqrt{D} = \sqrt{4 - 4\cdot(-1)\cdot 1} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

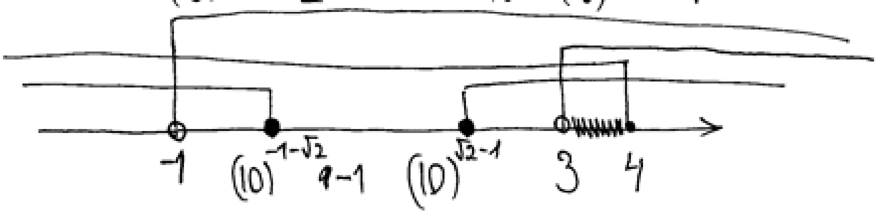
$t_1 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2}-1$ $\quad t_2 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-1-\sqrt{2})}{2} = -1-\sqrt{2}$

$t \le -1-\sqrt{2}$ $\quad t \ge \sqrt{2}-1$ $\quad$ возвращаемся к замене

$\lg(x+1) \le -1-\sqrt{2}$ $\quad \lg(x+1) \ge \sqrt{2}-1$

$x+1 \le (10)^{-1-\sqrt{2}}$ $\quad x+1 \ge (10)^{\sqrt{2}-1}$

$x \le (10)^{-1-\sqrt{2}}-1$ $\quad x \ge (10)^{\sqrt{2}-1}-1$



Ответ: $x \in (3;4]$

В примере 16 неверное преобразование квадрата логарифма и необоснованный переход от неравенства $AB \le 0$ к совокупности $A \le 0$ или $B \le 0$.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 15

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– в июле 2030 года долг должен составить 600 тыс. рублей;

– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2360 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение

Пусть первые 5 лет долг уменьшался на x тысяч рублей. Так как через 5 лет долг стал 600 тысяч рублей, то начальная сумма была равна $600 + 5x$ тысяч рублей. При уменьшении долга на одну и ту же сумму каждый год выплачиваются начисленные в этот год проценты и сумма ежегодного уменьшения долга:

Год	Долг после начисления %	Платеж	Долг после платежа
2026	$720 + 6x$	$120 + 2x$	$600 + 4x$
2027	$720 + 4{,}8x$	$120 + 1{,}8x$	$600 + 3x$
2028	$720 + 3{,}6x$	$120 + 1{,}6x$	$600 + 2x$
2029	$720 + 2{,}4x$	$120 + 1{,}4x$	$600 + x$
2030	$720 + 1{,}2x$	$120 + 1{,}2x$	600
2031	720	240	480
2032	576	216	360
2033	432	192	240
2034	288	168	120
2035	144	144	0

Общая сумма выплат равна

$8x + 120 \cdot 5 + 240 + 216 + 192 + 168 + 144 = 8x + 1560$ тысяч рублей.

По условию она равна 2360 тысячам рублей. Значит, $8x + 1560 = 2360$, тогда $x = 100$. Начальная сумма кредита равна $600 + 5x = 1100$ тысяч рублей

Ответ: 1100 тысяч рублей.

Типичные ошибки

1) Ошибки в математической модели.

В математическую модель для этой задачи включалось обоснованное составление уравнения для суммы всех выплат.

Ошибки могли совершаться и в составлении таблицы (вместо уменьшения долга на одну и ту же величину брались одинаковые выплаты), и в составлении уравнения.

2) Вычислительные ошибки.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 17)

№15 Пусть S – сумма кредита, r – коэф. возрастания долга в год, x – неизвестная величина, на которую уменьшается S первые 5 лет, а y – вторые. $r = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$ из условия

год	Сумма кредита	Выплата	Сумма после выплаты
2026	Sr	$S\left(r - \frac{x-1}{x}\right)$	$\frac{x-1}{x} S$
2027	$\frac{x-1}{x} Sr$	$S\left(\frac{x-1}{x} r - \frac{x-2}{x}\right)$	$\frac{x-2}{x} S$
2028	$\frac{x-2}{x} Sr$	$S\left(\frac{x-2}{x} r - \frac{x-3}{x}\right)$	$\frac{x-3}{x} S$
2029	$\frac{x-3}{x} Sr$	$S\left(\frac{x-3}{x} r - \frac{x-4}{x}\right)$	$\frac{x-4}{x} S$
2030	$\frac{x-4}{x} Sr$	$S\left(\frac{x-4}{x} r - \frac{x-5}{x}\right)$	$\frac{x-5}{x} S = 600$т.р.
2031	$600r$	$600\left(r - \frac{y-1}{y}\right)$	$600 \frac{y-1}{y}$
2032	$600 \frac{y-1}{y} r$	$600\left(\frac{y-1}{y} r - \frac{y-2}{y}\right)$	$600 \frac{y-2}{y}$

продолжение таблицы:

2033	$600\,\frac{y-2}{y}\,r$	$600\left(\frac{y-2}{y}r-\frac{y-3}{y}\right)$	$600\,\frac{y-3}{y}$
2034	$600\,\frac{y-3}{y}\,r$	$600\left(\frac{y-3}{y}r-\frac{y-4}{y}\right)$	$600\,\frac{y-4}{y}$
2035	$600\,\frac{y-4}{y}\,r$	$600\left(\frac{y-4}{y}r-\frac{y-5}{y}\right)$	$600\,\frac{y-5}{y}=0$

Из 2035 года: $600\cdot\frac{y-5}{y}=0 \Rightarrow y=5$.

Сумма выплат:

- $S\left(\frac{x+3}{x}\right)+600(3{,}6-2)=2\,360$

$S\left(\frac{x+3}{x}\right)=1\,400 \Rightarrow S=\frac{1400x}{x+3}$

Из 2030 года: $\frac{x-5}{x}S=600 \Rightarrow$

$$\begin{cases}\frac{x-5}{x}S=600\\ S=\frac{1400x}{x+3}\end{cases} \Rightarrow \frac{x-5}{x}\cdot\frac{1400x}{x+3}=600 \Rightarrow 14x-14\cdot5=6x+18 \Rightarrow$$

$x=11 \Rightarrow$

$S=\frac{1400\cdot11}{11+3}=\frac{1400\cdot11}{14}=100\cdot11=1100$ т.р.

P.S. К РЕШЕНИЮ

$S\left(\frac{x+3}{x}\right)$ получилось из $S\left(r\left(1+\frac{x-1+x-2+x-3+x-4}{x}\right)-\left(\frac{x-1+x-2+x-3+x-4+x-5}{x}\right)\right)$

$600(3{,}6-2)$ получилось из $S\left(r\,\frac{5+4+3+2+1}{5}-\frac{4+3+2+1}{5}\right)$ при $r=1{,}2$

Ответ: 1100 т.р.

Пример 17 демонстрирует верное построение модели и обоснованное получение правильного ответа.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 18)

(15) Взято S рублей в кредит на 10 лет под процент 20%

пусть x - уменьшение долга в 2026-2030

Год	S - сумма долга (тыс.)	S+% - сумма с процентами	платеж (тыс.)	остаток (после платежа) (тыс.)
2026	S	$S+0{,}2S$	$x+0{,}2S$	$S-x$
2027	$S-x$	$S-x+0{,}2(S-x)$	$x+0{,}2(S-x)$	$S-2x$
2028	$S-2x$	$S-2x+0{,}2(S-2x)$	$x+0{,}2(S-2x)$	$S-3x$
2029	$S-3x$	$S-3x+0{,}2(S-3x)$	$x+0{,}2(S-3x)$	$S-4x$
2030	$S-4x$	$S-4x+0{,}2(S-4x)$	$x+0{,}2(S-4x)$	$S-5x=600$
2031	600	$600+0{,}2\cdot600$	$120+120=240$	480
2032	480	$480+0{,}2\cdot480$	$120+96=216$	360
2033	360	$360+0{,}2\cdot360$	$120+72=192$	240
2034	240	$240+0{,}2\cdot240$	$120+48=168$	120
2035	120	$120+0{,}2\cdot120$	$120+24=144$	0

Сумма всех платежей $= x+0{,}2(S-x)+x+0{,}2(S-2x)+x+0{,}2(S-3x)+$ $+x+0{,}2(S-4x)+240+216+192+168+144+x+0{,}2S.$ $0{,}2(600+5x)$

$S-5x=600 \Rightarrow S=600+5x \Rightarrow$ Сумма платежей $=5x+960+0{,}2(600+5x)+$

$+0{,}2(600+5x-x)+0{,}2(600+5x-2x)+0{,}2(600+5x-3x)+0{,}2(600+5x-4x)=$

$=\cancel{20x+1560}.\ 8x+1560$

$8x+1560=2360$

$8x=800$

$x=100 \Rightarrow S=600+5\cdot100=1100$ тыс. Ответ: 1100 тыс.

Пример 18 демонстрирует верное построение модели и обоснованное получение правильного ответа.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 19)

15). A – тело кредита в тыс. руб.; N – кол-во лет;

$N=10$; $r=20$; $K=1+\frac{20}{100}=1,2$

№	до нач.%	после нач.%	выплаты	долг
1	A	$A(1+\frac{r}{100})$	$x+\frac{Ar}{100}$	$A-x$
2	$A-x$	$(A-x)(1+\frac{r}{100})$	$x+\frac{(A-x)r}{100}$	$A-2x$
3	$A-2x$	$(A-2x)(1+\frac{r}{100})$	$x+\frac{(A-2x)r}{100}$	$A-3x$
4	$A-3x$	$(A-3x)(1+\frac{r}{100})$	$x+\frac{(A-3x)r}{100}$	$A-4x$
5	$A-4x$	$(A-4x)(1+\frac{r}{100})$	$x+\frac{(A-4x)r}{100}$	$A-5x$
6	$A-5x$	$(A-5x)(1+\frac{r}{100})$	$y+\frac{(A-5x)r}{100}$	$\cancel{A-A-y}(A-5x)-y$
7	$(A-5x)-y$	$((A-5x)-y)(1+\frac{r}{100})$	$y+\frac{((A-5x)-y)r}{100}$	$(A-5x)-2y$
8	$(A-5x)-2y$	$((A-5x)-2y)(1+\frac{r}{100})$	$y+\frac{((A-5x)-2y)r}{100}$	$(A-5x)-3y$
9	$(A-5x)-3y$	$((A-5x)-3y)(1+\frac{r}{100})$	$y+\frac{((A-5x)-3y)r}{100}$	$(A-5x)-4y$
10	$(A-5x)-4y$	$((A-5x)-4y)(1+\frac{r}{100})$	$y+\frac{((A-5x)-4y)r}{100}$	0

Т.к. за 5 год кредитования (2030 г.) долг равен 600 тыс. руб., то:

$A-5x=600$; $x=\frac{A-600}{5}$

Составим общую сумму выплат, и подставим известные числовые значения: ~~(и приравняем)~~

$$\cancel{5}\cdot\frac{A-600}{\cancel{5}}+\frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}}\left(\frac{A+A-4x}{2}\cdot 5\right)+5y+\frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}}\left(\frac{600+600-4y}{2}\cdot 5\right)=2360.$$

Т.к. кредит будет выплачен полностью к июлю 10 года (2035 г.), то:

$(A-5x)-5y=0$; $600-5y=0$; $600=5y$; $y=120$

$$A-600+\frac{2}{10}(A-2x)\cdot 5+600+\frac{2}{10}(600-2y)\cdot 5=2360$$

$$A-\cancel{600}+A-2x+600+\cancel{600}-2y=2360$$

$2A-2x-2y=1760$; $2A-2\cdot\frac{A-600}{5}-240=1760$

$2\left(\frac{4A-600}{5}\right)=2000$; $\frac{4A-600}{5}=1000$; $5000=4A-600\,|:4$

$1250=A-150$; $A=1400$

Ответ: 1400.000

Пример 19 демонстрирует верное построение модели. При решении уравнения допущена вычислительная ошибка, из-за чего получен неверный ответ.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 20)

№15

$S_0 = ?$
$n = 10$ лет
$r = 20\%$
$k = 1{,}2$
$X_1 + X_2 + \ldots + X_9 + X_{10} = X = 2360$ тыс. руб.
$S_5 = 600$ тыс. руб.

1) $S_1 = S_0 - p$
$S_2 = S_1 - p = S_0 - 2p$
$S_3 = S_0 - 3p$
$S_4 = S_0 - 4p$
$S_5 = S_0 - 5p = 600$
$S_0 - 5p = 600$
$p = \frac{S_0 - 600}{5}$

2) $S_6 = S_5 - m$
$S_7 = S_6 - m = S_5 - 2m$
$S_8 = S_5 - 3m$
$S_9 = S_5 - 4m$
$S_{10} = S_5 - 5m = 0$
$\Downarrow$
$600 - 5m = 0$
$m = 120$ тыс. руб.

3) $S_1 = kS_0 - X_1$
$S_2 = kS_1 - X_2$
$S_3 = kS_2 - X_3$
$S_4 = kS_3 - X_4$
$S_5 = kS_4 - X_5$
$S_6 = kS_5 - X_6$
$S_7 = kS_6 - X_7$
$S_8 = kS_7 - X_8$
$S_9 = kS_8 - X_9$
$S_{10} = kS_9 - X_{10}$

4) из п. 1 $\Rightarrow$: $S_1 = S_0 - p = S_0 - \frac{S_0 - 600}{5} = \frac{4S_0 + 600}{5}$
$p = \frac{S_0 - 600}{5}$

5) $S_1 + S_2 + \ldots + S_9 + S_{10} = k(S_0 + S_1 + \ldots + S_8 + S_9) - \overbrace{(X_1 + X_2 + \ldots + X_9 + X_{10})}^{=X}$ (*)

6) $S_1 + S_2 + \ldots + S_9 + \overset{0}{S_{10}} = \frac{\frac{4S_0 + 600}{5} + 0}{\cancel{2}} \cdot \cancel{10} = \frac{4S_0 + 600}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 4S_0 + 600$

7) $S_0 + S_1 + \ldots + S_8 + S_9 = S_0 + 4S_0 + 600 = 5S_0 + 600$

8) (*) $4S_0 + 600 = \frac{120}{100} \cdot (5S_0 + 600) - 2360$
$4S_0 + 600 + 2360 = \frac{\cancel{120} \cdot \cancel{5} S_0}{\cancel{100}} + \frac{\cancel{600} \cdot 120}{\cancel{100}}$
$4S_0 + 2960 = 6S_0 + 720$
$2960 - 720 = 6S_0 - 4S_0$
$2S_0 = 2240$
$S_0 = 1120$ тыс. руб.

$2960 - 720 = 2240$; $2240 : 2 = 1120$

Ответ: $S_0 = 1120$ тыс. руб.

В примере 20 при составлении уравнения совмещены две арифметические прогрессии в одну, а у них различные разности. Модель построена неверно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 21)

№15

Посчитаем сумму выплат с 2030 по 2035 г:

	S	S+%	выплата
30	600	1,2·600	1,2·600 − 1,2·480
31	480	1,2·480	1,2·480 − 1,2·360
32	360	1,2·360	1,2·360 − 1,2·240
33	240	1,2·240	1,2·240 − 1,2·120
34	120	1,2·120	1,2·120
35	0		

1,2·600 = 720 тыс. руб.
сумма выплат с 30 по 35

25	S	$1{,}2S$	$1{,}2S-\frac{4S}{5}$
26	$\frac{4S}{5}$	$1{,}2\left(\frac{4S}{5}\right)$	$1{,}2\left(\frac{4S}{5}\right)-\frac{3S}{5}$
27	$\frac{3S}{5}$	$1{,}2\left(\frac{3S}{5}\right)$	$1{,}2\left(\frac{3S}{5}\right)-\frac{2S}{5}$
28	$\frac{2S}{5}$	$1{,}2\left(\frac{2S}{5}\right)$	$1{,}2\left(\frac{2S}{5}\right)-\frac{S}{5}$
29	$\frac{S}{5}$	$1{,}2\left(\frac{S}{5}\right)$	$1{,}2\left(\frac{S}{5}\right)$

$S\left(1{,}2\left(1+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)\right)=2360-720$

$3{,}6S-2S=1640$

$1{,}6S=1640$

$S=102{,}5$ тыс. руб.

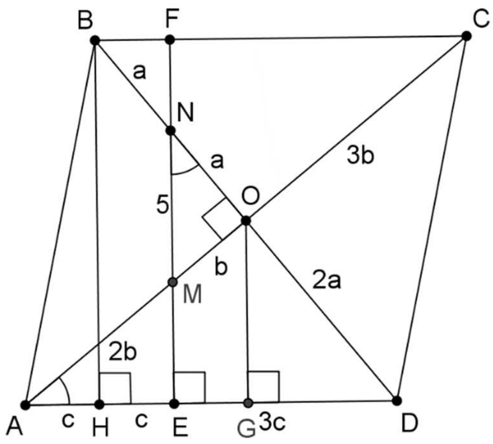
Ответ: 1025000 рублей

В примере 21 неверно построена модель – в 1-й таблице при подсчете выплат вычитаемые остатки долга не надо умножать на 1,2, во 2-й таблице остаток долга не должен уходить в 0, а должен доходить до 600 тысяч руб. в 2029 году.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 16

Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке M, а диагональ BD в точке N, причём AM:MC = 1:2, BN:ND = 1:3.



а) Докажите, что $\cos\angle BAD = \frac{1}{5}$.

б) Найдите площадь ромба, если $MN = 5$.

Решение

а) Пусть прямая из условия пересекает AD в точке E, а BC – в точке F; пусть O – точка пересечения диагоналей ромба. Опустим высоту BH и перпендикуляр из точки O на AD. По свойству диагоналей ромба $AO = CO$. Тогда $AM : MO = 2 : 1$. Так как $BN : ND = 1 : 3$,

$BO = DO$, то N – середина BO. Обозначим $BN = NO = a$, $MO = b$, $HE = c$. Тогда $DO = 2a$, $AM = 2b$, $CO = 3b$.

По теореме Фалеса для угла BDA и параллельных прямых FE и BH (обе эти прямые перпендикулярны AD) получаем $DE : HE = DN : BN = 3 : 1$. Тогда $DE = 3c$.

По теореме Фалеса для угла BDA и параллельных прямых FE и OG (обе эти прямые перпендикулярны AD) получаем $DE : EG = DN : NO = 3 : 1$. Тогда $EG = c$.

По теореме Фалеса для угла CAD и параллельных прямых FE и OG получаем $EG : AE = MO : AM = 1 : 2$. Тогда $AE = 2c$.

Тогда $AD = AE + DE = 2c + 3c = 5c$. Но в ромбе $AB = AD$, $AB = 5c$.

$AH = AD - DE - HE = 5c - 3c - c = c$.

Тогда $\cos\angle BAD = AH : AB = \frac{1}{5}$.

б) Прямоугольные треугольники AOD и NED подобны по двум углам: прямому и общему (диагонали в ромбе перпендикулярны).

Тогда $\frac{DO}{MO} = \frac{AO}{NO} = \frac{AD}{MN}$ или $\frac{2a}{b} = \frac{3b}{a} = \frac{5c}{5}$. Отсюда $2a^2 = 3b^2$, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $c = \frac{2a}{b} = \sqrt{6}$.

Площадь ромба найдем по формуле $S = AD^2 \sin\angle BAD = 25c^2\sqrt{1 - 0{,}2^2}$, или $S = 25 \cdot 6\sqrt{0{,}96} = 60\sqrt{6}$.

Ответ: б) $60\sqrt{6}$.

Типичные ошибки

1) Неверные свойства ромба.

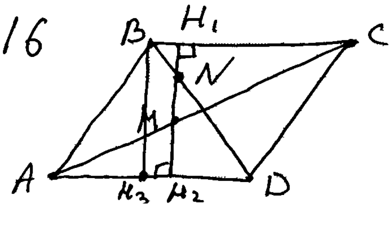
2) Рассмотрение частных случаев.

3) Вычислительные ошибки.

К решению задания приступало очень небольшое количество выпускников, даже меньше, чем к решению задачи 13 по стереометрии.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 22)

№16



Дано: $ABCD$ – ромб

$MN \perp BC$ $\frac{BN}{ND} = \frac{1}{3}$

$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$

Решение:

а) $MN \cap BC = H_1$ $\quad AD \parallel BC$ (т.к $ABCD$ - ромб) $\Rightarrow$

$MN \cap AD = H_2$ $\quad \Rightarrow MN \perp BC;\ MN \perp AD$

Рассм. $\triangle AMH_2$ и $\triangle CMH_1$

$\left.\begin{array}{l} \angle H_1 = \angle H_2 = 90^\circ \\ \angle H_1MC = \angle H_2MA \text{ (т.к. вертик.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle$и подобны

$\Downarrow$

$$\frac{H_1C}{AH_2} = \frac{CM}{AM} = \frac{2}{1}$$

Рассм $\triangle BH_1N$ и $\triangle DH_2N$

$\left.\begin{array}{l} \angle H_1 = \angle H_2 = 90^\circ \\ \angle H_1NB = \angle H_2ND \text{ (т.к. вертик.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle$и подобны

$\Downarrow$

$$\frac{BH_1}{H_2D} = \frac{BN}{ND} = \frac{1}{3}$$

Пусть $AH_2 = x$; $H_1C = 2AH_2 = 2x$

$BH_1 = y$; $DH_2 = 3BH_1 = 3y$

$BC = AD$ (т.к. $ABCD$-ромб) $\Rightarrow$ $x + 3y = y + 2x$

$x = 2y$

Опустим высоту BH_3 на AD

$BH_1H_2H_3$ – прямоуг. (все углы прямые) $\Rightarrow H_2H_3 = BH_1 = y$

$AH_3 = AH_2 - H_2H_3 = y$

$\cos\angle BAH_3 = \dfrac{AH_3}{AB}$; $AB = BC = AD = 5y$ (т.к. $ABCD$-ромб)

(т.к. $\triangle ABH_3$, $\angle H_3 = 90^\circ$)

$\cos\angle BAH_3 = \dfrac{y}{5y} = \dfrac{1}{5}$ $\quad$ ч.т.д.

б) из подобий, доказанных в п. а) следует, что

$$\frac{H_1N}{H_2N} = \frac{BN}{ND} = \frac{1}{3}\ ;\ \frac{H_1M}{H_2M} = \frac{CM}{AM} = \frac{2}{1}$$

Пусть $H_1H_2 = h$

Тогда $H_1N = \frac{h}{4}$; $H_2M = \frac{h}{3}$

$$MN = h - H_1N - H_2M = h\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5h}{12} = 5\sqrt{3}$$

$h = H_1H_2 = 12\sqrt{3}$

$12\sqrt{3} = BH_3 = H_1H_2$ (т.к. $BH_1H_2H_3$ – прямоуг.)

Из $\triangle ABH_3$, $\angle H_3 = 90^\circ$;

$\cos\angle BAH_3 = \frac{1}{5}$

$\sin\angle BAH_3 = \sqrt{1-\cos^2\angle BAH_3} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{BH_3}{AB}$

$AB = \frac{5\cdot \cancel{12}^{6}\sqrt{\cancel{3}}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{\cancel{3}}\cdot\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$

$S_{ромба} = AB \cdot H_1H_2 = 15\sqrt{2}\cdot 12\sqrt{3} = 180\sqrt{6}$

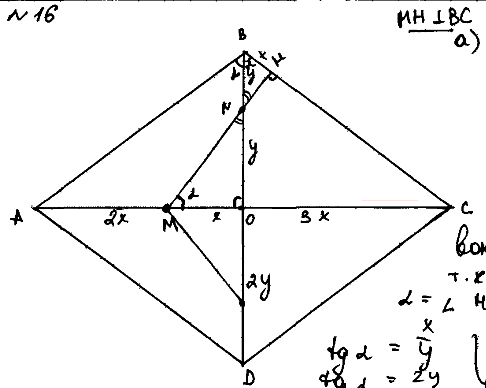
Ответ: $S_{ромба} = 180\sqrt{6}$

В примере 22 обоснованно выполнен пункт а), с его использованием верно вычислена площадь ромба.

Оценка эксперта: 3 балла.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 23)

№16



$MH \perp BC$

а) т.к. $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$, $AO = OC$ $\Rightarrow$ ∃ $AM = 2x$, $MO = x$, $OC = 3x$ $\Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$

т.к. $\frac{BN}{ND} = \frac{1}{3}$, $BO = OD$ $\Rightarrow$ ∃ $BN = NO = y$, $OD = 2y$ $\Rightarrow \frac{BN}{ND} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$

вокруг MBHO можно описать ω, т.к. $\angle MOB = \angle BHM = 90^\circ$ $\Rightarrow$

$\alpha = \angle HMO = \angle OBC$ – как опир-ся на 1 дугу $\Rightarrow$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2y}{3x}$ $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2y}{3x} \Rightarrow 3x^2 = 2y^2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

~~т.к. $\angle ABO = \angle OBC = 2\alpha \Rightarrow \angle BAO = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \cos\angle BAO = \cos(90-\alpha)$~~

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{3}{5} - 1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$.

$\angle BAD = \angle BAC + \angle BCA \Rightarrow \angle BAD = 180 - 2\alpha \Rightarrow \cos\angle BAD = \cos(180 - 2\alpha) = \cos 2\alpha$

т.к. $\angle BAC = \angle BCA = \angle CAD$

$\cos\angle BAD = \frac{1}{5}$.

б) $MN = 5\sqrt{2}$

$\sin\alpha$?

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + 3/5 = 1$

$\sin^2\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$

$\cos\alpha = \frac{MO}{MN}$ и $\cos\alpha = \frac{BM}{BN}$

$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{MO}{5\sqrt{2}} \Rightarrow MO = 5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{5}\sqrt{6}\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{5}}\cancel{\sqrt{5}}} = \sqrt{30}$. $\Rightarrow$ т.к. $MO = x$, $AC = 6x$ $\Rightarrow AC = 6\sqrt{30}$.

$\sin\alpha = \frac{NO}{MN} \Rightarrow NO = 5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{5}\cdot 2\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{5}\sqrt{5}}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ т.к. $NO = y$, $BD = 4y$ $\Rightarrow BD = 8\sqrt{5}$.

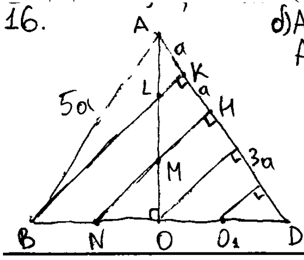
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot\sin 90\cdot d_1\cdot d_2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 6\sqrt{30}\cdot \cancel{8}^{4}\sqrt{5} = 24\sqrt{6\cdot5\cdot5} = 5\cdot 24\sqrt{6} = 120\sqrt{6}$

В примере 23 вместо tgα вычислен ctgα, затем использована неверно записанная формула приведения для cos (180° – 2α), что привело к верному результату. Поэтому пункт а) не выполнен. С его использованием верно вычислена площадь ромба. По критериям работа оценена в 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 24)

16.



б) $AK=KH=a$ $HD=3a$ $AB=5a$ по т. Пифагора $BK=2a\sqrt{6}$ $\Rightarrow KD=4a$ и $BD=2a\sqrt{10}$

$AO=a\sqrt{15}$ $MO=\frac{a\sqrt{15}}{3}$ $NO=\frac{a\sqrt{10}}{2}$, а $MN=5$

$MO^2+NO^2=25=\frac{a^2\,15}{9}+\frac{a^2\cdot 10}{4}=\frac{150a^2}{36}$ $a^2=\frac{25\cdot 36}{150}=\frac{36}{6}=6$ $a=\sqrt{6}$

$S=2\cdot BO\cdot AO=2\cdot\sqrt{90}\cdot\sqrt{60}=20\sqrt{54}=60\sqrt{6}$ Ответ: $60\sqrt{6}$

а) $BK \parallel NH$; $\triangle BLO \sim \triangle NMO$, $BO=2MO \Rightarrow LO=2MO \Rightarrow AO=3MO \Rightarrow L$ - середина $AM \Rightarrow AK=KH$

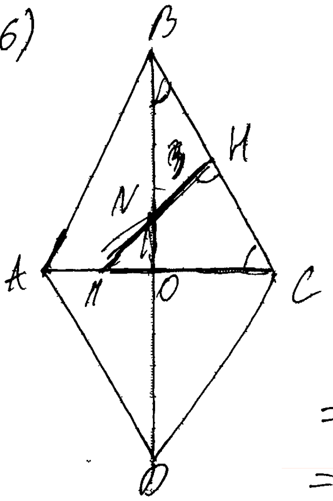
Если мы проведём линии $\parallel NH$ через O и O_1, то они разделят AD на 5 равных отрезков (из-за ранее упомянутого подобия) $\Rightarrow AK=\frac{1}{5}AB \Rightarrow \cos\angle BAK=\frac{1}{5}$ ч.т.д

В примере 24 пункт а) не обоснован, с его использованием решён пункт б). По критериям работа оценена в 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 25)

16)



а) Пусть H - точка пересечения прямой MN с BC; пусть $BN=y$; тогда $ND=3y$

Пусть $AM=x$; тогда $MC=2x$

пусть O - точка пересечения диагоналей ABCD $\Rightarrow AO=OC \Rightarrow$ т.к. $AC=MA+MC=$
$=x+2x=3x \Rightarrow AO=OC=\frac{AC}{2}=\frac{3x}{2}=1{,}5x \Rightarrow$
$\Rightarrow MO=AO-AM=1{,}5x-x=0{,}5x$

т.к. $BO=OD \Rightarrow$ т.к. $BN+ND=BD=y+3y=$
$=4y \Rightarrow BO=OD=\frac{BD}{2}=\frac{4y}{2}=2y \Rightarrow \cancel{BO}\,NO=BO-BN=$
$=2y-y=y$

а) рассмотрим теорему Менелая для $\triangle BOC$ и прямой MH: $\frac{CH}{HB}\cdot\frac{BN}{NO}\cdot\frac{MO}{MC}=1$

$$\frac{CH}{HB}\cdot\frac{y}{y}\cdot\frac{0,5x}{2x}=1$$

$\frac{CH}{HB}=4 \Rightarrow$ пусть $CH=4z$; $HB=z$

рассмотрим $\triangle MHC$: $\cos\angle BCM=\frac{HC}{MC}=\frac{4z}{2x}=\frac{2z}{x}$

рассмотрим $\triangle BOC$: $\cos\angle BCM=\frac{OC}{BC}=\frac{1,5x}{5z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4z}{2x}=\frac{1,5x}{5z}\Rightarrow \frac{z}{x}=\sqrt{\frac{3}{20}}=\frac{\sqrt3}{2\sqrt5}\Rightarrow z=\frac{\sqrt3}{2\sqrt5}\cdot x\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle BCM=\frac{1,5x}{\frac{\sqrt3}{2\sqrt5}\cdot x}=\frac{3\sqrt5}{\sqrt3}\Rightarrow$ по основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\angle BCM=1-\cos^2\angle BCM=$

$=1-\left(\frac{8\sqrt5}{5\sqrt3}\right)^2=\frac{6}{15}\Rightarrow$ т.к. $\angle BCM=\frac{1}{2}\cdot\angle BCD=\frac{1}{2}\cdot\angle BAD\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle BAD=\cos 2\cdot\angle BCM=\cos^2\angle BCM-\sin^2\angle BCM=\left(\frac{8\sqrt5}{5\sqrt3}\right)^2-\frac{6}{15}=$

$=\frac{1}{3}$

б) По теореме Менелая для $\triangle CMH$ и прямой OB:

$\frac{OC}{OM}\cdot\frac{MN}{NH}\cdot\frac{HB}{BC}=1\Rightarrow\frac{1,5x}{0,5x}\cdot\frac{MN}{NH}\cdot\frac{z}{5z}=1\Rightarrow\frac{MN}{NH}=\frac{5}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow NH = \frac{3MN}{5} = \frac{3\cdot 5}{5} = 3$

~~рассмотрим~~ рассмотрим $\triangle BNH$ и $\triangle BOC$ т.к.

$\angle B$ – общий; $\angle BHN = \angle BOC = 90^\circ \Rightarrow \triangle BNH \sim \triangle BOC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BNH = \angle BCO \Rightarrow \cos\angle BNH = \cos\angle BCO \Rightarrow \frac{NH}{NB} = \frac{3\sqrt5}{5\sqrt3} \Rightarrow$

$\Rightarrow NB = \frac{5\sqrt3\cdot NH}{3\sqrt5} = \frac{5\sqrt3\cdot 3}{3\sqrt5} = \frac{5\sqrt3}{\sqrt5} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow BO = 2y = \frac{2\cdot 5\sqrt3}{\sqrt5} = \frac{10\sqrt3}{\sqrt5} \Rightarrow \sin\angle ACO = \sqrt{\frac{6}{15}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BO}{BC} = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{\frac{10\sqrt3}{\sqrt5}}{BC} = \frac{\sqrt3}{\sqrt5} \Rightarrow BC = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ рассмотрим $\triangle BOC$ по теореме Пифагора:

$OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \sqrt{10^2 - \frac{10^2\cdot 3}{5}} = \frac{10\sqrt2}{\sqrt5} \Rightarrow AC = 2OC = \frac{20\sqrt2}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{S_{ABCD} = \frac{20\sqrt2}{\sqrt5}\cdot\frac{10\sqrt3}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{100\sqrt6}{5}}$

$S_{ABCD} = \frac{2BO\cdot AC}{2} = \frac{BO\cdot AC}{2} = \frac{\frac{20\sqrt3}{\sqrt5}\cdot\frac{20\sqrt2}{\sqrt5}}{2} = \frac{200\sqrt6}{5}$

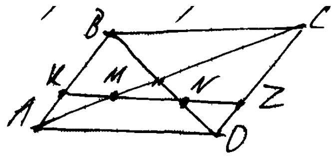
Ответ: $\frac{200\sqrt6}{5} = 40\sqrt6$

В примере 25 пункт а) решён верно. В пункте б) вместо $\sin BCO = \frac{BO}{BC}$ использовано значение $\cos BCO$, что привело к неправильному ответу. Ошибка геометрическая, а не вычислительная, поэтому пункт б) не засчитывается. За решение пункта а) по критериям 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 26)

№16



Дано:

$AM : MC = 1 : 2$ $MN = 5\sqrt{3}$

$BN : ND = 1 : 3$

Д-ть:

$\cos\angle BAD = \frac{1}{5}$ Н-ти: S_p - ?

Решение:

$AM = x$ $MC = 2x$ $BN = x$ $ND = 3x$ (по усл)

$S_p = ah = ab\sin\alpha$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ $\cos\angle BAD = \frac{1}{5}$ (по усл)

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$

$AC = BD$ (диагонали в ромбе равны)

$AC = BD = 4x$

$KM = NZ = MN = 5\sqrt{3}$

$AD = KM + NZ + NM = 5\sqrt{3} \cdot 3 = 15\sqrt{3}$

$AD = BC = 15\sqrt{3}$ $S_p = 15\sqrt{3} \cdot 15\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{24}}{5} = 270\sqrt{6}$

Ответ: б) $270\sqrt{6}$.

В примере 26 пункт а) отсутствует. В пункте б) используется неверное утверждение, что диагонали ромба равны (тем самым задача сводится к частному случаю, когда ромб является квадратом), и считается, что отрезок KZ разбивается диагоналями на 3 равные части. Но при этом синус угла ромба не равен 1, как должно быть в квадрате.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 17

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(xy - 2x + 12) \cdot \sqrt{y - 2x + 12} = 0, \\ y = 3x + a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

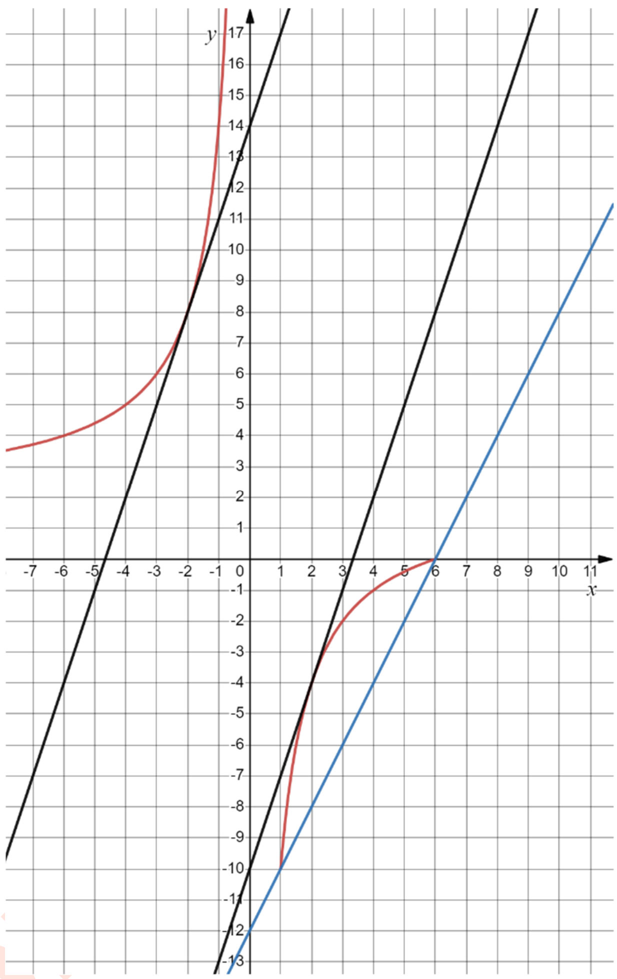
Решение

1-й способ. Графический

Система определена при $y - 2x + 12 \geq 0$. На этой области определения первое уравнение системы равносильно совокупности: $y = 2x - 12$ и $y = 2 - \frac{12}{x}$ (можно делить на x, так как при $x = 0$ получается неверное равенство $0 = 8$).

В координатах xOy получаем прямую и гиперболу в области $y \geq 2x - 12$.

Второе уравнение задаёт прямую с угловым коэффициентом 3, у которой параметр a отвечает за сдвиг вверх-вниз по вертикальной оси.



Точка пересечения прямых $y = 3x + a$ и $y = 2x - 12$ при каждом фиксированном a является решением системы. Поэтому ровно 2 решения система будет иметь, если прямая $y = 3x + a$ касается одной из веток гиперболы, либо пересекает правую ветку гиперболы один раз в области выше прямой $y = 2x - 12$, а второй раз в области ниже прямой $y = 2x - 12$.

Рассмотрим ключевые положения и посчитаем значения параметра в каждом из них.

Прямая $y = 3x + a$ касается гиперболы $y = 2 - \frac{12}{x}$, если уравнение $3x + a = 2 - \frac{12}{x}$ или $3x^2 + (a - 2)x + 12 = 0$ имеет ровно одно решение. Квадратное уравнение имеет ровно одно решение, если его дискриминант $(a - 2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12$ равен нулю: $a - 2 = \pm 12 \Leftrightarrow a \in \{-10; 14\}$.

Гипербола $y = 2 - \frac{12}{x}$ пересекается с прямой $y = 2x - 12$ при $x = 1$ и $x = 6$. Получаем $x = 1$, $y = -10$; $x = 6$, $y = 0$. Найдем значения параметра, при которых прямая $y = 3x + a$ проходит через эти точки.

1) $-10 = 3 + a \Leftrightarrow a = -13$. При этом значении параметра решением системы является точка $(1; -10)$ и вторая точка пересечения гиперболы с прямой $y = 3x + a$, которая находится в пределах области выше прямой $y = 2x - 12$. Всего будет два решения системы, так что это значение параметра нам подходит.

2) $0 = 18 + a \Leftrightarrow a = -18$. При этом значении параметра решением системы является точка $(6; 0)$, а вторая точка пересечения гиперболы с прямой $y = 3x + a$ находится в пределах области ниже прямой $y = 2x - 12$. Всего будет одно решение системы, так что это значение параметра нам не подходит.

Ответ: $a \in (-18; -13] \cup \{-10; 14\}$.

2-й способ. Алгебраический

Так как замена $y = 3x + a$ линейная, то система будет иметь 2 решения в том случае, если первое уравнение системы после подстановки $y = 3x + a$ будет иметь 2 решения:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x^2 + (a-2)x + 12 = 0; \\ x = -a - 12; \end{array}\right. \\ x \geq -a - 12. \end{cases}$$

Назовем корень $-a - 12$ числом x_1. Заметим, что x_1 при любом a является решением полученной системы. Следовательно, эта система имеет два решения, если:

1) квадратное уравнение имеет одно решение x_0, то есть $D = 0$, причем $x_0 > x_1$;

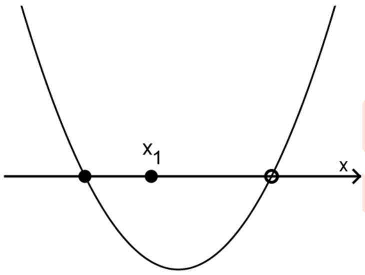
2) квадратное уравнение имеет два решения, то есть $D > 0$, причем меньший из этих двух корней не превосходит x_1, а больший больше x_1.

Найдем $D = (a-2)^2 - 12^2 = (a-14)(a+10)$. Найдем абсциссу вершины параболы $y = 3x^2 + (a-2)x + 12$ – это $x_0 = \frac{2-a}{6}$.

Следовательно, для первого случая получаем

$$\begin{cases} D = 0; \\ x_0 > x_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 14; \\ a = -10; \end{array}\right. \\ a > -14{,}8; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 14; \\ a = -10. \end{array}\right.$$

Второй случай выполняется, если парабола $y = 3x^2 + (a-2)x + 12$ пересекает ось абсцисс в двух точках, причем число x_1 лежит между этими точками либо совпадает с левой точкой:



Этот рисунок задается следующими условиями:

$$\begin{cases} D > 0; \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y(x_1) = 0; \\ x_1 < x_0; \end{cases} \\ y(x_1) < 0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -10) \cup (14; +\infty); \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 + 31a + 234 = 0; \\ a > -14{,}8; \end{cases} \\ a^2 + 31a + 234 < 0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -10) \cup (14; +\infty); \\ \left[\begin{array}{l} a = -13; \\ a \in (-18; -13). \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-18; -13].$$

Следовательно, ответ $a \in (-18; -13] \cup \{-10; 14\}$.

Ответ: $a \in (-18; -13] \cup \{-10; 14\}$.

Типичные ошибки

1) При реализации графического метода не отбрасываются части гиперболы, которые не соответствуют ОДЗ первого уравнения, из-за чего модель получается неверной и неверно определяется число точек пересечения.

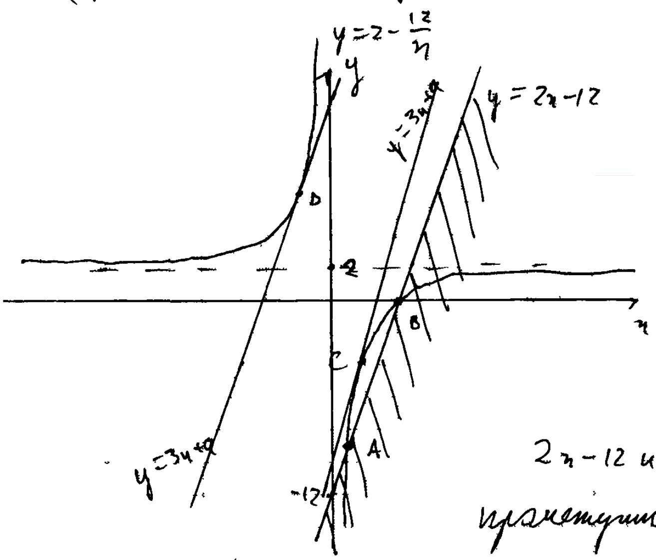
2) При реализации аналитического метода неверно решаются иррациональные неравенства.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 27)

№17 $\begin{cases} (xy - 2x + 12)\sqrt{y - 2x + 12} = 0 \\ y = 3x + a \end{cases}$

Условие: $y - 2x + 12 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2x - 12$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} xy - 2x + 12 = 0 \\ y - 2x + 12 = 0 \end{array}\right. \\ y = 3x + a \\ y - 2x + 12 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} xy = 2x - 12 \\ y = 2x - 12 \end{array}\right. \\ y = 3x + a \\ y \geq 2x - 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2 - \frac{12}{x} \\ y = 2x - 12 \end{array}\right. \\ y = 3x + a \\ y \geq 2x - 12 \end{cases}$$



Схематичный график. При любом a есть минимум одно решение т.к. $y = 3x + a \cap y = 2x - 12$ в точках D и C будет 2 решения т.к. $y = 3x + a \cap 2x - 12$ и касается $y = 2 - \frac{12}{x}$ и в промежутке от $[A; B)$ тоже будет 2 решения.

D, C:

$y = 2 - \frac{12}{x}$ $\quad y' = -\frac{12'x - 12x'}{x^2} = -\frac{0 - 12}{x^2} = \frac{12}{x^2} \Rightarrow$

$y = 3x + a$ $\quad y' = 3$

$\frac{12}{x^2} = 3 \Rightarrow 12 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

при $x = 2$: $y = 2 - \frac{12}{2} = 2 - 6 = -4 \Rightarrow -4 = 2 \cdot 3 + a \Rightarrow a = -10$

при $x = -2$: $y = 2 + \frac{12}{2} = 2 + 6 = 8 \Rightarrow 8 = -2 \cdot 3 + a \Rightarrow a = 14$

A: $2x - 12 = 2 - \frac{12}{x} \Rightarrow 2x - 14 + \frac{12}{x} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 12 = 0$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$y_1 = 12 - 12 = 0$ $\Rightarrow$ $0 = 18 + a \Rightarrow a = -18$

$y_2 = 2 - 12 = -10$ $\quad -10 = 3 + a \Rightarrow a = -13$

Мы включили точку A т.к. $\cancel{y = 2x - 12}$ ($y = 3x + a$) пересекает $y = 2 - \frac{12}{x}$ дважды, не включили точку B т.к. $y = 3x + a$ пересекает $y = 2 - \frac{12}{x}$ единожды, остальная часть функции отрезано условием.

$\Rightarrow a \in [-18; -13] \cup \{-10\} \cup \{14\}$

Ответ $[-18; -13] \cup \{-10\} \cup \{18\}$

В примере 27 верно построена модель и обоснованно получен правильный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 28)

№ 17 $\begin{cases} (xy - x + 8) \cdot \sqrt{y - x + 8} = 0 \\ y = 2x + a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy - x + 8 = 0 \\ y = 2x + a \\ y - x + 8 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y - x + 8 = 0 \\ y = 2x + a \end{cases} \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 + ax - x + 8 = 0 \\ x + a + 8 \geq 0 \end{cases} \\ x + a + 8 = 0 \end{array} \right.$

$$\left[\begin{array}{l} x=-(a+8) \quad \text{— 1 корень всегда} \\ ① \begin{cases} 2x^2+(a-1)x+8=0 \quad ② \\ x+a+8\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Одно ~~корень~~ решение есть всегда $\left(x=-(a+8);\ y=-a-16 \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ система ① должна иметь ровно 1 решение отличное от этого. 1 реш это 1 корень x т.к. y однозначно задан от x $y=2x+a$

② $2x^2+(a-1)x+8=0$

$$D=(a-1)^2-4\cdot 2\cdot 8\geq 0$$

$$(a-1)^2\geq 64$$

$$\left[\begin{array}{l} a-1\geq 8 \\ a-1\leq -8\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a\geq 9 \\ a\leq -7\end{array}\right.$$

т.к. $x=-(a+8)$ уже есть, в ① сист. его можно не искать $\Rightarrow x>-(a+8)$

~~Чтобы корни были 2~~

Рассмотрим варианты

1) $D=0$ $\left[\begin{array}{l} a=9 \\ a=-7\end{array}\right.$

$a=-7$ ОДЗ: $x>-1$

$$2x^2-8x+8=0$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0$$

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-9\end{cases}$ $\begin{cases} x=2 >-1 \\ y=4-7=-3\end{cases}$

2 реш. $\Rightarrow$ $a=-7$

$a=9$ $2x^2+8x+8=0$ ОДЗ: $x>-17$

$$x^2+4x+4=0$$

$$(x+2)^2=0$$

$\begin{cases} x=-17 \\ y=-25\end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 >-17 \\ y=-4+9=5\end{cases}$

2 реш. $\Rightarrow$ $a=9$

2) $D > 0$

корни должны быть по разные стороны от числа $-(a+8)$

т.к. коэф при x^2 равен $2>0$, ветви вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ усл. можно записать как $2(a+8)^2 - (a-1)(a+8) + 8 < 0$ (+ усл. $D>0$)

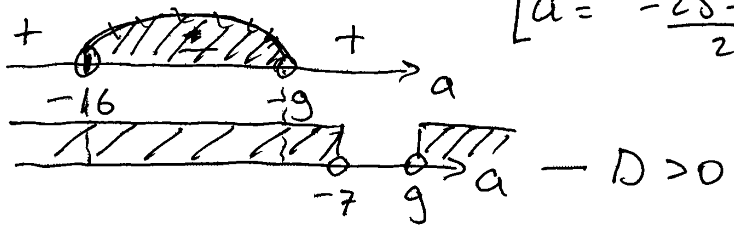
$$2a^2+32a+128-a^2-8a+a+8+8<0$$

$$a^2+25a+144<0$$

$\cancel{\frac{D}{4} = 144-144=0}$ $\quad D = 625-576=49$

$\cancel{(a+12)^2 \leq 0}$

$$\left[\begin{array}{l} a = \frac{-25+7}{2} = -9 \\ a = \frac{-25-7}{2} = -16 \end{array}\right.$$



Итого $a \in (-16;-9)$ (решения различны т.к. x различны $(x \neq a-8)$) в сист. ①

Ответ: $a \in (-16;-9) \cup \{-7\} \cup \{9\}$

В примере 28 верно построена модель и обоснованно получен правильный ответ, за исключением потерянной точки – 9. По критериям оценка 3 балла.

Оценка эксперта: 3 балла.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 29)

17) $\begin{cases} (xy-2x+12)\cdot\sqrt{y-2x+12}=0 \\ y=3x+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy-2x+12=0 \\ y-2x+12 \geq 0 \end{cases} \\ y-2x+12=0 \end{array}\right. \\ y=3x+a \end{cases}$

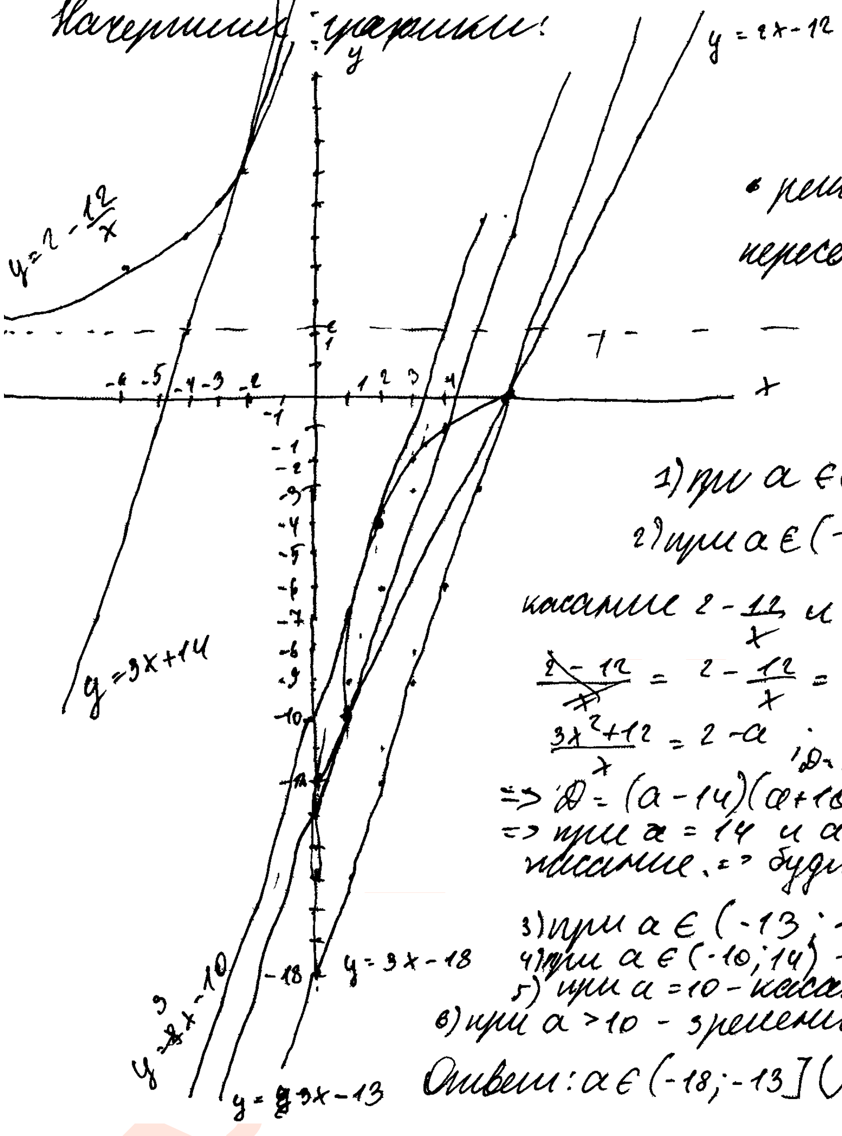
$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}xy = 2x - 12\\ y \geq 2x - 12\end{array}\right.\\ y = 2x - 12\end{array}\right.\\ y = 3x + a\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}y = 2 - \frac{12}{x}\\ y \geq 2x - 12\end{array}\right.\\ y = 2x - 12\end{array}\right.\\ y = 3x + a\end{array}\right.$$

$y = 2 - \frac{12}{x}$ – гипербола с смещением на 2 вверх.

$y = 2x - 12$ – прямая

$y = 3x + a$ – прямая с ~~углом~~ смещением a. („семейство прямых").

Начертим графики:



$y \geq 2x - 12$ – область слева от прямой.

• решением будет пересечение $y = 3x + a$ и $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}y = 2 - \frac{12}{x}\\ y \geq 2x - 12\end{array}\right.\\ y = 2x - 12\end{array}\right.$

1) при $a \in (-\infty; -18]$ – 1 решение.

2) при $a \in (-18; -13]$ – 2 решения.

касание $2 - \frac{12}{x}$ и $3x + a$.

$\cancel{\frac{2x-12}{x}} = 2 - \frac{12}{x} = 3x + a$. ; $3x + \frac{12}{x} = 2 - a$.

$\frac{3x^2+12}{x} = 2 - a$; $3x^2 + 12 = 2x - ax$.

$D = (a-2)^2 - 144 = (a - 2 - 12)(a - 2 + 12)$

$\Rightarrow D = (a-14)(a+10)$; $D = 0$ – касание.

$\Rightarrow$ при $a = 14$ и $a = -10$ происходит касание. $\Rightarrow$ будет 2 решения

3) при $a \in (-13; -10)$ – 3 решения.

4) при $a \in (-10; 14)$ – 1 решение

5) при $a = 10$ – касание. $\Rightarrow$ 2 решения.

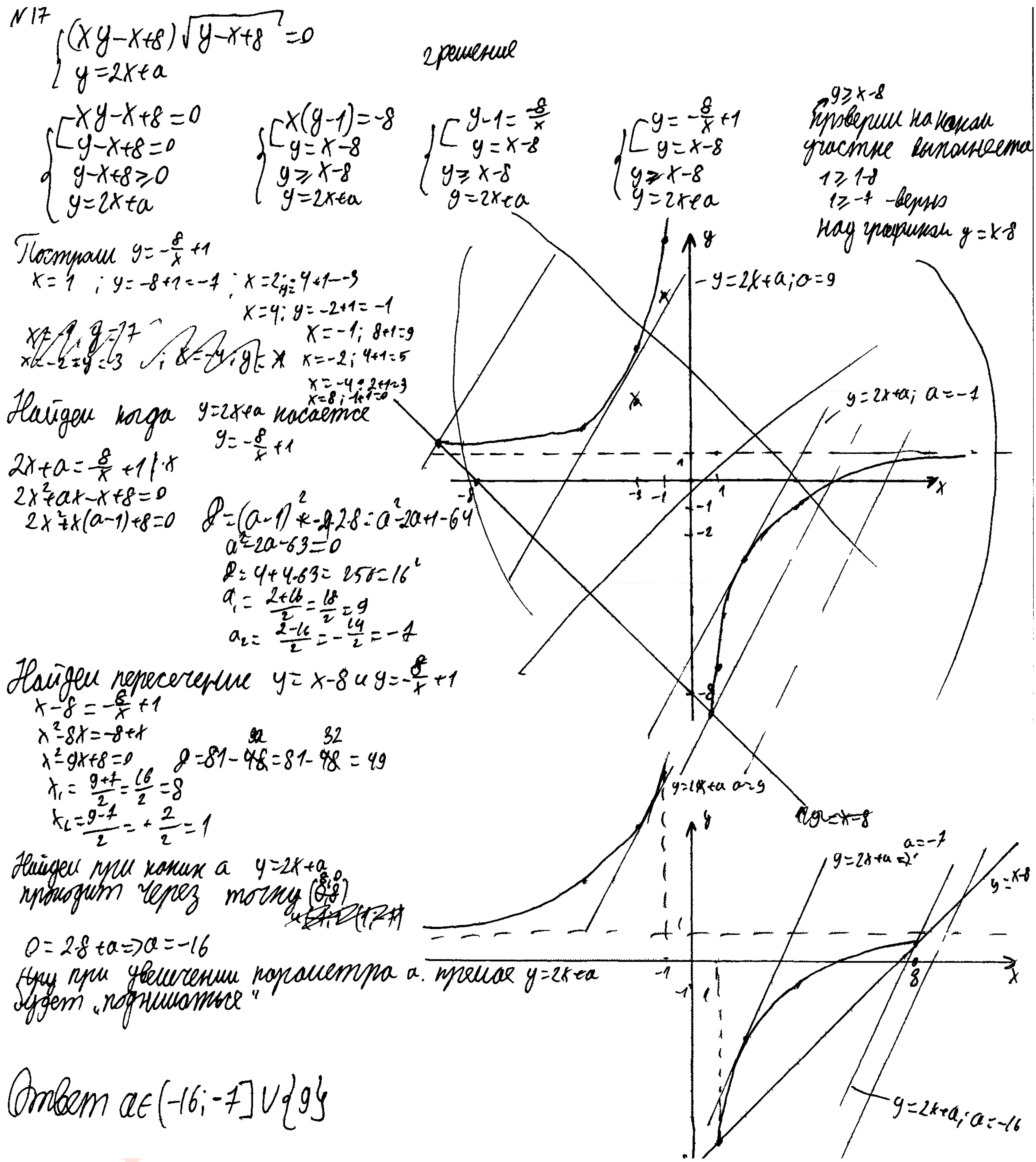
6) при $a > 10$ – 3 решения.

Ответ: $a \in (-18; -13] \cup \{10\}$.

В примере 29 верно построена модель и обоснованно получен правильный ответ, за исключением потерянной точки касания при a = 14. По критериям оценка 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 30)



В примере 30 верно построена модель. График построен неточно, точка пересечения графика и гиперболы должна быть (8; 0), не найдены вторая точка пересечения и соответствующее значение параметра (только абсцисса), неверно найден промежуток для параметра. По критериям оценка 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 18

Ваня написал на доске трёхзначное число A. Петя переписал это число A, вычеркнул из него одну цифру и получил двузначное число B. Коля тоже переписал это число A, вычеркнул из него одну цифру (возможно, ту же самую, что и Петя) и получил двузначное число C.

а) Может ли быть верным равенство $A = B \cdot C$, если $A > 150$?

б) Может ли быть верным равенство $A = B \cdot C$, если $540 \le A < 600$?

в) Найдите наибольшее число A, для которого может быть верным равенство $A = B \cdot C$.

Решение.

а) Да, может. Например, если $A = 625$, $B = 25$, $C = 25$, то получаем равенство: $625 = 25 \cdot 25$.

Или, например, если $A = 160$, $B = 16$, $C = 10$, то получаем равенство: $160 = 16 \cdot 10$.

б) Заметим, что если $540 \le A < 600$, то первая цифра числа A равна 5. Также заметим, что вторая цифра числа A не меньше 4. Таким образом, и B, и C не меньше 40. Значит, $A = B \cdot C \ge 40 \cdot 40 = 1600 > 600$. Тогда указанное равенство не может быть верным.

в) Сначала приведем пример:

$A = 910$, $B = 91$, $C = 10$, тогда $B \cdot C = 91 \cdot 10 = 910 = A$.

Докажем, что A не может быть больше 910. Пусть $A > 910$ и $A = \overline{9bc}$, $b \ge 1$. Тогда если оба мальчика зачеркнули b или c, то $B \cdot C \ge 8100$. Такое нам не подходит. Значит, один из мальчиков или оба вычеркнули первую цифру.

Пусть оба мальчика вычеркнули первую цифру. Тогда $B = C = \overline{bc}$. Значит, $A = B^2$. Если $A < 1000$, то $B < 32$ (так как $32^2 = 1024$). Нам надо найти $A > 910$. Тогда $B > 30$. Значит, $B = 31$. Но тогда $A = 961$, что невозможно, так как 961 не оканчивается на 31.

Пусть Петя вычеркнул первую цифру, а Коля – одну из остальных.

Если Коля вычеркивает c, получаем $B \cdot C \ge (10 + c) \cdot 91 = 910 + 91c$, значит, $c = 0$, $B \cdot C = 10b \cdot (90 + b) = 900b + 10b^2$, значит, $b = 1$. Получаем наш пример.

Если Коля вычеркивает b, получаем

$B \cdot C = (10b + c) \cdot (90 + c) = 900b + 90c + 10bc + c^2$. Тогда $b = 1$, $c = 0$. Опять получаем наш пример. Таким образом, 910 – наибольшее возможное значение A.

Ответ: а) Да; б) Нет; в) 910.

Типичные ошибки

1) Необоснованные утверждения (например, что либо число A – квадрат, либо содержит 0 и 1).

2) В пункте а) приведено число *A*, но не указано, какие будут *B* и *C*.

2) При решении перебором – потеря случаев (неполный перебор).

3) При решении пункта в) есть только пример и отсутствует оценка.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 31)

№18 а) $625 = 25 \cdot 25$ да, можно

в) Для чисел от 799 до 770 самыми маленькими произведениями будут из чисел ~~числа~~ состоящих из 2х крайних цифр, а они намного больше, чем нужно. Для чисел от 769 до 728 самыми маленькими произведения будут из 2х ~~последних~~ чисел состоящих из 2х последних цифр, но они тоже больше, чем нужно. Значит перебор нужно начинать с числа 727.

$727 \ne 72 \cdot 27,\ 77 \cdot 77,\ 72 \cdot 72,\ 27 \cdot 27$

$726 \ne 72 \cdot 72,\ 76 \cdot 76,\ 26 \cdot 26,\ 76 \cdot 26$

$725 \ne 25 \cdot 25$; $725 < 72 \cdot 25$

$724 \ne 24 \cdot 24$; $724 < 72 \cdot 24$

$723 \ne 23 \cdot 23$; $723 < 72 \cdot 24$

$722 \ne 22 \cdot 22$; $722 < 72 \cdot 22$

$721 \ne 21 \cdot 21$; $721 < 72 \cdot 21$

$720 \ne 20 \cdot 20$; $720 < 72 \cdot 20$

$719 \ne 19 \cdot 19$; $719 < 71 \cdot 19$

$718 \ne 18 \cdot 18$; $718 < 71 \cdot 18$

$717 = 17 \cdot 17$; $717 < 71 \cdot 17$

$717 \ne 17 \cdot 17$; $< 71 \cdot 17$

$716 \ne 16 \cdot 16$; $< 71 \cdot 16$

$715 \ne 15 \cdot 15$; $< 71 \cdot 15$

$714 \ne 14 \cdot 14$; $714 < 71 \cdot 14$

$713 \ne 13 \cdot 13$; $713 < 71 \cdot 13$

$712 \ne 12 \cdot 12$; $712 \ne 71 \cdot 12$

$711 \ne 11 \cdot 11$; $711 < 71 \cdot 11$

$\underline{710 = 71 \cdot 10}$

При переборе нужно брать 2 самых маленьких числа, или одно самое маленькое и следующее по величине, другие брать бессмысленно, т.к. произведение получается слишком большим.

~~Отв: 710~~

б) Для чисел от 340 до 343 и оканчивающихся „0", т.е. 350, 370, 380, 390 самыми маленькими произвед будут числа состоящие из 2х крайних цифр, а они больше, чем нужно. Для чисел от 344 до 349, от 355 до 359, от 366 до 369, от 377 до 379, а также 388, 389, 399 самыми маленькими произведениями будут те, к-рые будут состоять из ~~2х~~ чисел состоящих из 2х первых цифр, т.к. произведение (самое маленькое) будет больше, чем нужно. Для чисел от 351 до 354, от 361 до 365, от 371 до 376, от 381 до 387 и 399 самыми маленькими произведениями будут те, что состоят из чисел, состоящих из крайних цифр, и они тоже будут больше того произвед, которое нужно. НЕТ, не может.

Отв: а) да, может
б) нет, не может
в) 710

В примере 31 решены все пункты. Единственная проблема – число 789, которое в пункте в) выпадает из промежутка 770-799. Перебор получился неполным, но тем не менее решено было поставить 4 балла.

Оценка эксперта: 4 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 32)

№18 а) да, например: $A=310$, $B=31$, $C=10$ $A=B\cdot C$ $310=31\cdot 10$

б) $A - \overline{xyz} \Rightarrow A=100x+10y+z$ | $340\le A<400 \Rightarrow x=3$, $y\ge 4$

1) $B=\overline{xy}=10x+y$

$C=\overline{yz}=10y+z$

$A=B\cdot C \Rightarrow 100x+10y+z=(10x+y)(10y+z)$

$300+10y+z=300y+30z+10y^2+yz$

$29z+290y+10y^2+yz=300$

$29(10y+z)+y(10y+z)=300$

$(10y+z)(29+y)=300$

$y\ge 4 \Rightarrow 29+y\ge 33 \Rightarrow 10y+z \le \frac{300}{33}<10$

$10y+z<10$

$y\geqslant 4 \Rightarrow 40+z<10$ - противоречие

$z>0 \Rightarrow$ не может быть

2) $B=\overline{xz}=10x+z$ $\cancel{100x+10y+z}$

$C=\overline{xy}=10x+y$

$100x+10y+z=(10x+z)(10x+y)$

$100x+10y+z=100x^2+10xz+10xy+yz$

$300+10y+z=900+30z+30y+yz$

$29z+20y+yz=-600$

$z, y>0 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ не может быть.

3) B – xz $= 10x+z$ $\Rightarrow$ $100x+10y+z=(10x+z)(10y+z)$
C – yz $=10y+z$

$100x+10y+z=100xy+10xz+10yz+z^2$

~~100x~~

$300+10y+z=300y+30z+10yz+z^2$

$290y+29z+10yz+z^2=300$

$29y+z(29+10y+z)=300$

$y\geq 4 \Rightarrow 290\cdot 4+z(29\cdot 10y+z)=300$

противоречие $\Rightarrow$ не может быть.

4) B и C не могут быть одинаковыми, т.к. между 340 и 400 нет таких квадратов для которых выполнялись бы условия:

$19^2=361$ $\quad 361=19\cdot 19$ – в 361 нет 9.

~~361+363+7~~

$18^2=324<340$ – не подходит

из (1) ~~и~~ (4) $\Rightarrow$ равенство не может быть верным

в) при B – xy
C – yz

$100x+10y+z=100xy+10y^2+10xz+yz$

$x_{наиб}-7$

$700+10y+z=700y+10y^2+70z+yz$

$700=690y+69z+yz$

$700=$

$\Rightarrow$ Аналогично п. а) $\quad A_{наиб}=\overline{710}=\overline{71}\cdot\overline{10}$

Ответ: 710

В примере 32 решены пункты а) и б). В пункте в) только приведён пример. Видимо, на оценку не хватило времени.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 33)

18 а) Да, если $A=210$, $B=21$, $C=10$, тогда $A=B\cdot C$
$210=21\cdot 10$.

б) Нет, ~~т.к~~.

1) Заметим, что возможные двузначные числа, полученные из чисел из диапазона 340–349, могут иметь в ~~десятках~~ разряде десятков только цифры 3 и 4 (например, 341 – получим 31, 41, 34). Произведение любых двузначных чисел, начинающихся на 3 или 4, всегда ≥ 900, а 900 больше любых чисел из диапазона 340-349 $\Rightarrow A \neq B\cdot C$, если $340 \leq A \leq 349$.

2) Если $350 \leq A \leq 359$, возможно получить двузн. числа, нач. на 3 и 5. Их произведение $\geq 900 \Rightarrow A \neq B\cdot C$, если $350 \leq A \leq 359$.

3) Если $360 \leq A < 400$, возможно получить двузн. числа, начинающиеся ~~начин~~ на цифры 3, 6, 7, 8, 9. Произведение любой пары таких чисел всегда ≥ 900, но 900 больше любого числа A, что меньше 400 $\Rightarrow A \neq B\cdot C$, если $360 \leq A < 400$, т.к. $B\cdot C \geq 900$.

При любом числе A, к-е больше 339, но меньше 400, мин. возможное произведение B и C ≥ 900, т.к ~~B всегда ≥ 30 и C всё~~ $B \geq 30$, $C \geq 30 \Rightarrow A \neq B\cdot C$, если $340 \leq A < 400$

в) 1) Если $700 \leq A < 800$:
B и C могут иметь в десятках только 7 и 7 $\Rightarrow B \geq 70$ и $C \geq 70 \Rightarrow$

$B \cdot C \geq 4900$. $4900 >$ любого числа A, что меньше 800 $\Rightarrow$ не подходит.

2) Если $780 \leq A < 790$:

$B \geq 70$, $C \geq 70$, а $B \cdot C \geq 4900$ $\Rightarrow$ не подходит

3) Если $770 \leq A < 780$:

$B \geq 70$, $C \geq 70$, а $B \cdot C \geq 4900$ $\Rightarrow$ не подходит

4) Если $760 \leq A < 770$:

$B \geq 60$, $C \geq 60$, а $B \cdot C \geq 3600$, $3600 > A$ из данного диапазона $\Rightarrow$ не подходит

5) Если $750 \leq A < 760$:

$B \geq 50$, $C \geq 50$, а $B \cdot C \geq 2500$; $2500 > A$ $\Rightarrow$ не подходит.

6) Если $740 \leq A < 750$:

$B \geq 40$, $C \geq 40$, а $B \cdot C \geq 1600$; $1600 > A$ $\Rightarrow$ не подходит

7) Если $730 \leq A < 740$:

$B \geq 30$, $C \geq 30$, а $B \cdot C \geq 900$ ~~зн~~, $900 > A$ $\Rightarrow$ не подходит.

8) Если $720 \leq A < 730$:

I) если $A = 729$: B и C могут быть равны $72, 79, 29$, заметим, что ~~их~~ произведение пар этих чисел никогда не оканчивается на 9 $\Rightarrow$ получить 729 невозможно $\Rightarrow$ не подходит.

II) если $A = 728$: B и C могут быть $72, 78, 28$. Их произведение никогда не оканчивается на 8 $\Rightarrow$ получить 728 невозможно $\Rightarrow$ не подходит.

III) если $A = 727$: B и C м.б. $72, 77, 27$. Их произв-е не оканчивается на 7 при любой паре $\Rightarrow$ получить 727 невозможно $\Rightarrow$ не подходит.

IV) если $A = 726$: B и C м.б. $72, 26, 76$: произведение пары оканчивается на 6 только при 26·26, 76·76 и 26·76, но

26·26 = 676 ≠ 726, 76·76 = 5776 ≠ 726, 26·76 = 5776 ≠ 726 =>

=> не подходит.

VI) Если A = 725: B и C м.б. 72, 25, 75. Произведение ок-ся на 5, только при 25·25, 75·25, 75·75, но ~~25·75 ≠ 725~~

25·25 = 625 ≠ 725, 75·25 > 725, 75·75 > 725 => не подходит.

~~VI) Если A = 726: B и C м.б. 72, 76, 26. B·C ок-ся на 6 только при 76·76, 26·26, 76·26. 76·76 > 726, 26·26 = 676 ≠ 726, 76·26 > 726 => не подходит.~~

~~VII) Если A~~

VI) Если A = 724, то B и C м.б. 72, 24, 74,

=> B·C не ок. на 4 => не подходит.

VII) Если A = 723, то B и C м.б. 72, 23, 73, B·C не ок. на 3. => не подходит.

VIII) Если A = 722, то B и C м.б. 72, 22, B·C не ок. на 2 => не подходит.

IX) Если A = 721, то B и C м.б. 72, 21, 71. 71·71 ≠ 721, 21·21 ≠ 721, 71·21 ≠ 721 => не подходит.

X) Если A = 720, то B и C м.б. 70, 20, 72. Их произв ≠ 720.

XI) Если ~~A~~ 710 < A < 720, то B и ~~C м.б. никак~~ м.б.

B·C ≠ A ни при одном из них.

XII) Если A = 710, то B = 71, C = 10.

A = B·C. 710 = 71·10 => подходит.

Ответ: а) Да
б) Нет
в) 710

В примере 33 решены пункты а) и б). В пункте в) не проверен промежуток 710-720. Поэтому он не засчитан.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 34)

№ 18 а) Да, например $625 = A$, $25 = B$, $25 = C$

$25 \cdot 25 = 625$ $625 = 625$

б) Нет, так как если вычеркнуть любую цифру из чисел трёхзначных, то $B \cdot C > A$

Например, минимальные возможные значения B и C 40 и 40 $\Rightarrow 40 \cdot 40 = 1600$, и $1600 > 600$

в)

Ответ: а) да б) нет в) —

В примере 34 решены пункты а) и б). Пункт в) не сделан.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 35)

№ 18

а) $A = \overline{abc}$ $A > 150$

$B = \left[\begin{array}{l} =\overline{ab} \\ =\overline{bc} \\ =\overline{ac} \end{array}\right.$ $C = \left[\begin{array}{l} =\overline{ab} \\ =\overline{bc} \\ =\overline{ac} \end{array}\right.$ Пример: $A = 160 = 16 \cdot 10$ $A = 210 = 21 \cdot 10$

$A \neq 165$ $\vdots 3$, $\vdots 5$ $\Rightarrow B = 15$ $C \neq \frac{165}{15} \neq 11$ $A \neq 220$

$A \neq 172 \not\vdots 3$, $\vdots 4$, $\vdots 2$ $12 \vdots 3$, $\vdots 4$, $\vdots 2$ $72 \vdots 2$, $\vdots 4$, $\vdots 3$ $17 \not\vdots 4$, $\not\vdots 2$, $\not\vdots 3$ — противоречие. в числе A всегда должны быть 1 и 0

Ответ: а) Да; $A = 160 = 16 \cdot 10$; $A = 210 = 21 \cdot 10$

№18

б) $540 \le A \le 600$

$540; \dots; 549$
$550; \dots; 559$
$560; \dots; 569$
$570; \dots; 579$
$580; \dots; 589$
$590; \dots; 600$

ни в одном из чисел, которым может быть число A, не может быть 1 и 0 одновременно (доказал в пункте а) лист 3)

$\Downarrow$

$A \neq BC$

Ответ: б) Нет

в) Исходя из пунктов а) и б) делаем вывод, что подходят числа в которых есть 1 и 0; Перечислим их, попутно проверяя равенство:

$110 = 11 \cdot 10$
$120 = 12 \cdot 10$
$130 = 13 \cdot 10$
$140 = 14 \cdot 10$
$150 = 15 \cdot 10$
$160 = 16 \cdot 10$
$170 = 17 \cdot 10$
$180 = 18 \cdot 10$
$190 = 19 \cdot 10$
$210 = 21 \cdot 10$
$310 = 31 \cdot 10$
$410 = 41 \cdot 10$
$510 = 51 \cdot 10$
$610 = 61 \cdot 10$
$710 = 71 \cdot 10$
$810 = 81 \cdot 10$
$910 = 91 \cdot 10$

Больше 910 числа не подходят, поэтому максимальное - это 910.

Ответ: в) 910

В примере 35 решен пункт а). Кроме этого сделано необоснованное утверждение, что в числе A обязательно должны быть 1 и 0 (что неверно, например, $625 = 25 \cdot 25$), на которое опирается решение в пункте б) и в). Поэтому зачтён только пункт а).

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 36)

18 в) 625; т.к. $625 = 25 \cdot 25$, что соответствует условию, при котором мальчики зачеркнули цифру „6".

а) Нет.

б) Нет.

В примере 36 несчастный случай. Пример, решающий пункт а), приведён в пункте в), для которого он неверен. А в пункте а) написан ответ «нет». Таким образом, в задаче не решён ни один пункт.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пути устранения ошибок в ходе обучения школьников по математике в Иркутской области.

Геометрия. В нашем регионе подавляющее большинство обучающихся осваивают геометрию по учебнику под редакцией Л.С. Атанасяна (52% участников ЕГЭ). Намного реже используется учебник по геометрии под редакцией А.В. Погорелова (всего 4% участника ЕГЭ). В учебнике под редакцией Л.С. Атанасяна теоретический материал изложен полно, последовательно, систематично. Разнообразный задачный материал. Но многие базовые утверждения сформулированы только в содержании задач и не выделены в виде теорем.

Для того чтобы акцентировать внимание обучающихся на ключевых утверждениях, можно активно применять опорные конспекты, как это делают уже более опытные учителя. Желательно также дополнительно рассматривать ряд геометрических теорем, которые необходимы для получения высокого балла на профильном ЕГЭ (к примеру, теоремы Чевы и Менелая).

Алгебра, теория чисел и комбинаторика, математический анализ. В большинстве учебников, используемых учителями Иркутской области, недостаточно теоретического и задачного материала для организации подготовки к задачам ЕГЭ повышенного и высокого уровней сложности №№ 15, 17, 18. Экономические задания (задание № 15) в принципе выходят за рамки школьного курса. Теория чисел в большинстве учебников представлена в ограниченном объеме. Например, со свойствами остатков (которые использовались в решении задания № 18 в 2021 и 2022 году), знакомы в основном школьники, имеющие специальную олимпиадную подготовку. Методы решения задач с параметром (задание № 17) часто не выделяются, задачного материала мало.

Таким образом, для обучения решению вышеописанных задач второй части учителям необходимо использовать в большом количестве дополнительные дидактические материалы. Хотя это существенно затрудняет как работу учителя, особенно если у него пока нет достаточного опыта, так и организацию самостоятельной работы обучающихся.

3.2.3. Анализ метапредметных результатов обучения, повлиявших на выполнение заданий КИМ

Для осознания метапредметных результатов, повлиявших на выполнение заданий КИМ по профильной математике, следует оценить метазнания (знания о способах получения знаний), метаумения (междисциплинарные познавательные умения и навыки) и метапредметные результаты (развития способностей). Под метапредметными результатами по математике понимается способ деятельности в рамках образовательного процесса и решение проблем практико-ориентированных задач. К средствам формирования метапредметных результатов обучения относят практические работы, расчетные задачи, задания, для решения которых требуется усвоить информацию из различных источников и других общеобразовательных предметов школьной программы. Так, в математике задействованы знания из области химии, биологии, физики и ряда других предметов.

Проведение выбора наиболее эффективных способов решения, выдвижение гипотезы и оформление результатов относятся ко всем заданиям развернутой части. Требуется подбирать исходные данные; выбирать правильный алгоритм в решении математической задачи; прогнозировать и подбирать ответ в соответствии с условием задачи. Формирование навыков смыслового чтения заданий как метапредметного результата задействовано во всех заданиях ЕГЭ по профильной математике, так как необходимо четко понимать, что именно требуется от экзаменуемого. Помогает самостоятельность работы с информацией для выполнения конкретного задания. Требуется наличие умения составления и чтения таблиц и графиков.

Метапредметные знания применяются в рамках образовательного процесса и в бытовых условиях, когда обучающиеся могут принимать решения в различных жизненных ситуациях, где требуются умения мыслить нестандартно или креативно. Так, знания по математике периодически применяются в бытовых условиях: посчитать, войдет ли определённый предмет в дверной проем; можно ли поместить трость в чемодан; оценить калорийность блюд в дневном рационе человека; определить процентное содержание лекарственного вещества в зависимости от веса и возраста человека. Метапредметность – это явление существования единых основ нескольких предметов. Если речь идет о математике, то под последними понимается связь с биологией, физикой, химией, когда в заданиях требуется представлять структурные формулы веществ с определенным расположением радикалов и заместителей; русским языком, когда в заданиях с развернутым ответом требуется четко излагать алгоритм решения с пояснениями и если экзаменуемый не приобрел умение формировать свою мысль четко и грамотно, то возможны проблемы в проверке работы экспертами.

Периодически можно наблюдать типичные ошибки, обусловленные слабой сформированностью метапредметных результатов. Например, в заданиях на составление определенной последовательности правильных ответов требуется предельная концентрация внимания экзаменуемых и определенные навыки принятия решения.

Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы и связь с успешностью выполнения заданий КИМ	
1) Овладение универсальными учебными познавательными действиями	
Базовые логические действия	Проблемы сформированности логических универсальных учебных действий особое отражение находят в неумении работать со знаково-символьными моделями (недостаточный уровень абстракции мышления). Это отмечалось нами в содержательном анализе выполнения заданий КИМ. Задание № 6 (для решения которого надо было лишь применить стандартные свойства логарифмов) не смогли выполнить 84,6% школьников, не преодолевших порог. В задаче № 9 и № 10 на составление уравнения и на вычисление параметров графиков процент выполнения ещё ниже: 7,4 и 9,3 соответственно. Среди выпускников, набравших до 60 т. б., около половины справилось с этими заданиями. Эта проблема усугубляется при повышении уровня абстракции объектов. Проценты выполнения заданий, требующих математической техники (к которым относятся, в частности, все задания второй части), крайне низкие. Другой важный аспект – понимание того, что представляет собой доказательство, и умение построить дедуктивное алгебраическое или геометрическое доказательство. Менее трети школьников, получивших 81-100 т. б., смогли грамотно доказать утверждение из задания № 13 (стереометрия), около четверти выполнило задание № 16 (планиметрия).
Базовые исследовательские действия	Невысокий уровень развития исследовательских навыков проявляется в решении заданий различного уровня сложности. Даже геометрические задачи базового уровня требуют небольшого эвристического исследования. Нужно догадаться, какое сделать дополнительное построение (задание № 1). В задаче № 8 нужно провести исследование получившейся функции на данном промежутке. В задаче №10 по имеющемуся графику надо определить параметры функций. Среди выпускников, преодолевших порог и получивших до 60 баллов на экзамене, с заданием 8 или 10 справляется лишь 50%. Таким образом, даже простейшее исследование может провести лишь половина школьников удовлетворительного уровня математической подготовки. Для решения геометрического задания повышенного уровня сложности № 16 нужны только базовые

	геометрические знания. Тем не менее школьники, получившие за экзамен от 81 до 100 баллов, успешно справляются с задачами базового уровня (не менее 87%) и в среднем хорошо справляются с задачами повышенного уровня (около 50%), но не могут решить задачу № 16 (25,9% выполнения). Владея необходимым математическим аппаратом, они не могут выстроить исследование в решении этой задачи.
Работа с информацией	Основная проблема в работе с информацией, проявившаяся в этом экзамене по математике для 11-го класса, связана, собственно, с пониманием текстов, написанных на русском языке (проблема смыслового чтения). В задании № 3 вместо вероятности для спортсменов из Испании была посчитана вероятность для спортсменов из Бразилии. В задаче № 7 были посчитаны точки, где функция отрицательна, вместо точек, где производная функции отрицательна. В задаче № 11 вместо наибольшего значения было найдено значение на границе или точка максимума. Тем не менее можно сказать, что школьники, успешно выполнившие задания первой части, продемонстрировали умение работать с информацией в различных формах, у них умение работать с информацией можно считать сформированным на базовом уровне.
2) Овладение универсальными учебными коммуникативными действиями	
Выражение своей точки зрения в письменных текстах	В решениях заданий с развернутым ответом обучающиеся демонстрируют неумение выразить свою мысль. Мы видим это в обрывочных сжатых ссылках на теоремы в геометрических задачах 2-й части (№ 13 и № 16). Много проблем при решении задачи № 17, где зачастую не описан переход от условия к математической модели. Особенно большие проблемы в записи решения задачи № 18. Вместо описания основных моментов при переборе случаев (так называемом разумном переборе) выпускники описывают всё подряд, при этом теряя случаи, что приводит к неполному перебору и снижению оценки. Многие школьники не стараются использовать точную математическую и логическую терминологию, не имея сформированной привычки к ясному изложению своих размышлений.
3) Овладение универсальными учебными регулятивными действиями	

Самоорганизация	Судя по поведению школьников на заседаниях конфликтных комиссий, можно заключить, что подавляющее большинство тех, кто не получил желаемого результата на экзамене, были в этом результате сильно заинтересованы. Это означает, как правило, невысокий уровень сформированности регулятивных действий. Выпускники, не перешедшие порог, не смогли собраться на экзамене, вдумчиво выполнить задания «с учетом собственных возможностей» (см. ФГОС для основного общего образования) в рамках этой дисциплины. Некоторые участники экзамена даже не пытаются понять текст заданий, в некоторых случаях вместо решения просто вставляют в ответ данные из задания. Обучающиеся, недовольные оценками заданий с развернутым ответом, апеллируют выражениями «ну это же понятно», «я описался», «зачем это писать». В то время как логика представления математического решения описывается на уроках и в учебниках. В этом проявляются неспособность к самоорганизации и неумение понимать ответственность за свои решения.
Самоконтроль	Письменное изложение математического решения связано не только с логическими и коммуникативными действиями, но и с действием самоконтроля. Участники экзамена должны понимать, по каким правилам проходит экзамен, и уметь по возможности удовлетворить эти требования для получения наилучшего результата. Школьники с неплохим уровнем математической подготовки не всегда понимают, что проверяется именно текст решения, поэтому в нем нужно аккуратно описать положения, которые им могут казаться очевидными. К примеру, в признаке параллельности прямой и плоскости нужно указать, что прямая не принадлежит плоскости (задача № 13). Другое проявление самоконтроля касается сформированного навыка к перепроверке своих текстов, рассуждений, записей. К сожалению, нередко допускаемые ошибки могли быть устранены самим школьником при самопроверке. Например, в текстовой задаче № 9 ответ 1400 л/мин при заполнении резервуара емкостью 104 л никак не может быть правильным.

3.2.4. Выводы об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий

- *Перечень элементов содержания, усвоение которых всеми школьниками региона в целом можно считать достаточным*

Алгебра. Числа, корни, степени (базовый уровень). Преобразования выражений (базовый уровень)

Уравнения и неравенства. Уравнения и неравенства (базовый уровень)

Функции. Начала математического анализа. Определение и график функции (базовый уровень)

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей. Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач (базовый уровень)

Геометрия. Планиметрия (базовый уровень)

- *Перечень умений и видов деятельности, усвоение которых всеми школьниками региона в целом можно считать достаточным*

Уметь решать уравнения и неравенства. Базовый уровень

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели. Базовый уровень

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами. Базовый уровень

- *Перечень элементов содержания, усвоение которых всеми школьниками региона в целом нельзя считать достаточным*

Алгебра. Преобразования выражений (повышенный уровень)

Уравнения и неравенства. Уравнения и неравенства (повышенный и высокий уровни)

Функции. Начала математического анализа. Исследование функций (повышенный уровень)

Геометрия. Планиметрия (повышенный уровень). Стереометрия (повышенный уровень)

- *Перечень умений и видов деятельности, усвоение которых всеми школьниками региона в целом нельзя считать достаточным*

Уметь решать уравнения и неравенства. Повышенный уровень

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели. Повышенный и высокий уровни

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами. Повышенный уровень

- *Перечень элементов содержания, усвоение которых всеми школьниками региона с разным уровнем подготовки нельзя считать достаточным*

Группа участников с результатами от минимального до 60 т. б.

Алгебра. Основы тригонометрии (повышенный уровень). Преобразования выражений (базовый и повышенный уровни).

Функции. Начала математического анализа. Исследование функций (базовый и повышенный уровни).

Уравнения и неравенства. Уравнения и неравенства (повышенный и высокий уровни).

Геометрия. Планиметрия (повышенный уровень). Стереометрия (повышенный уровень).

Группа участников с результатами от 61 до 80 т. б.

Геометрия. Планиметрия (повышенный уровень). Стереометрия (повышенный уровень).

Уравнения и неравенства. Высокий уровень.

Алгебра. Высокий уровень.

- *Перечень умений и видов деятельности, усвоение которых всеми школьниками региона с разным уровнем подготовки нельзя считать достаточным*

Группа участников с результатами от минимального до 60 т. б.

Уметь решать уравнения и неравенства. Повышенный уровень.

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели. Повышенный и высокий уровни.

Уметь выполнять вычисления и преобразования. Базовый уровень и повышенный уровень.

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами. Повышенный уровень.

Группа участников с результатами от 61 до 80 т. б.

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами. Повышенный уровень.

Уметь решать уравнения и неравенства. Высокий уровень.

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели. Повышенный и высокий уровни.

- *Выводы об изменении успешности выполнения заданий разных лет по одной теме / проверяемому умению, виду деятельности (если это возможно сделать)*

Геометрия	Результаты по планиметрии и стереометрии в 2023 году на базовом уровне повысились. Задание по планиметрии (№ 1) – процент выполнения повысился с 69,8 до 72,3, по стереометрии (№ 2) – повысился с 54,3 до 81,4. На повышенном уровне № 16 (планиметрия) процент выполнения традиционно низкий, и ещё снизился с 3,0 в 2022 году до 0,8 в 2023, № 13 (стереометрия) процент незначительно повысился: с 0,6 до 1,2. Если на базовом уровне заметен некоторый рост результатов, то на повышенном уровне остается таким же или снижается.
Алгебра	На повышенном и высоком уровнях заметен рост результатов. Это иллюстрируют задание повышенного уровня № 9 (задача на движение): 48,9% (2022 год) и 61,8% (2023 год) и задание высокого уровня № 18: 0,7% (2022 год) и 12,3% (2023 год). То же замечание касается тригонометрии (задание № 12, 25,8% (2022 год) и 30,2% (2023 год)). Процент выполнения экономической задачи (уметь использовать приобретенные знания в практической деятельности) упал с 24,2 до 6,1. Это объясняется значительным усложнением математической модели задачи, о чём было сказано выше.
Уравнения и неравенства	Успешно освоены элементы содержания базового уровня. Задание повышенного уровня № 14 в 2022 году выполнялось намного успешнее: было 21,5% (2022 год), стало 8,4% (2023 год). Причина снижения выполнимости описана выше (показательное неравенство заменено на логарифмическое). Более успешно освоены элементы содержания высокого уровня (№ 17 повышение с 1,8% до 2,8% и № 18 повышение с 0,7% до 12,3%), что, возможно, объясняется более простыми заданиями (см. выше) в 2023 году.
Функции. Начала математического анализа	Выполнение задания базового уровня № 7 (уметь выполнять действия с функциями, исследование функций) повысился с 54,1% до 68,5%. На повышенном уровне задание № 10 (график функции) процент выполнения снизился с 66,4 до 60,7. Процент выполнения задания, направленного на исследование функции (№11), снизился с 73,3 до 49,6. Это говорит о недостаточном уделении внимания изучению производной функции и исследованию функций на повышенном уровне.

- *Выводы о существенности вклада содержательных изменений (при наличии изменений) КИМ, использовавшихся в регионе в 2023 году, относительно КИМ прошлых лет*

Содержательных изменений в первой части КИМ нет. При этом количество школьников, не преодолевших минимальный порог, уменьшилось: с 15,4% (2022 год) до 12% (2023 год).

Категория обучающихся с высоким уровнем подготовки, 81-100 т. б., увеличилась с 1,7% до 2,1%. Возможно, это связано с уменьшением сложности трех заданий, с которыми справляются только хорошо технически подготовленные школьники: № 13 (стереометрия), № 17 (алгебра) и № 18 (комбинаторика и алгебра). Заметим все же, что с заданием № 16 (планиметрия) и № 15 (экономическая задача) в этом году справились хуже (вместо 3,0% стало 0,8%, и вместо 24,2% стало 6,1%), но в целом динамика изменения количества школьников, получивших высокие баллы, положительная.

Судя по представленным материалам, можно предположить, что в рамках школьной программы большее внимание уделяется теоретической подготовке выпускников, а практическим знаниям уделяется остаточное внимание. Наблюдается увеличивающая дифференциация учеников с различным уровнем подготовки. Для тех обучающихся, которые изучают математику на базовом уровне, но выбирают сдавать экзамен повышенного уровня, существуют сложности. Эти обучающиеся показывают низкий уровень решения развернутых заданий второй части.

4. РЕКОМЕНДАЦИИ[5] ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ СУБЪЕКТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

4.1. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета в Иркутской области на основе выявленных типичных затруднений и ошибок

К выбору экзамена необходимо подходить очень осознанно, так как подготовку к нему необходимо начинать минимум после десятого класса. Существует корреляция того, чем раньше обучающиеся определяются с тем, какие предметы им необходимо изучать на профильном уровне, тем выше будут результаты ЕГЭ. ОГЭ можно считать отличной тренировкой, где экзаменуемые знакомятся с процедурой сдачи экзамена и получают необходимые навыки. Основной задачей учителя является формирование профессионально-образовательной траектории мотивации изучения математики на профильном уровне. Один из способов замотивировать и увлечь предметом - это создать условия для исследовательской деятельности, грамотно расставить приоритеты и сформировать исследовательские задачи, продемонстрировать возможности науки в объяснении явлений окружающего мира. С целью улучшения качества подготовки по профильной математике при организации учебного процесса необходимо уделять внимание повторению и обобщению наиболее значимых и трудных для обучающихся элементов содержания.

4.1.1. …по совершенствованию преподавания учебного предмета всем обучающимся

- *Учителям, методическим объединениям учителей*

1) Необходимо обучать методам решения заданий по основным разделам школьной математики, делая акцент на понимании ключевых логических схем в этих методах. По каждой теме целесообразно рассматривать разнообразные, а не «типичные» задания, чтобы обучающиеся более эффективно осваивали идеи и методы. Ориентация на логическую составляющую математической теории способствует углублению понимания математики и формированию логических познавательных учебных действий.

2) Регулярное применение в образовательном процессе теоретических знаний при выполнении контрольных и самостоятельных работ. Изучение теоретического материала формирует теоретическое и абстрактное мышление, развивает коммуникативные навыки. В современной школьной практике нередко встречается ситуация, когда школьники разбирают только формулировки геометрических теорем, «правила» построения графиков

[5] Составление рекомендаций проводилось на основе проведенного анализа результатов ЕГЭ и анализа выполнения заданий

отдельных видов функций и т.д. Многие школьники не знают авторов учебников, по которым учатся, и не читают эти учебники!

3) Следует обращать внимание обучающихся на возможности использования интернет-ресурсов, на которых представлена нормативная информация по организации ЕГЭ и методические рекомендации по подготовке к ЕГЭ.

В первую очередь это сайт ФГБНУ «ФИПИ». Школьникам необходимо продемонстрировать структуру сайта, разобрать демонстрационный вариант КИМ, обратить внимание на справочные материалы, которыми может пользоваться участник экзамена. Особое внимание уделить критериям оценки заданий. Использовать открытые банки заданий ЕГЭ по математике. Их главная цель — дать представление о том, какие задания будут в вариантах ЕГЭ по математике, и помочь выпускникам сориентироваться при подготовке к экзамену. На сайте ГАУ ИО ЦОПМКиМКО в дополнение к этому представлена информация о том, как подается апелляция, по каким вопросам заявление на апелляцию подавать не надо. Там же можно ознакомиться с методическими рекомендациями по результатам ЕГЭ по математике в Иркутской области, в которых представлены многочисленные примеры выполнения заданий и их оценки. Полезным будет раздел «Часто задаваемые вопросы». Если периодически обращаться к этим материалам, показывать обучающимся, это будет способствовать формированию навыков целеполагания, навыков разрешения проблем у школьников. Они получат более полное представление о стоящей перед ними задаче – успешная сдача ЕГЭ, о необходимых условиях для этого, будут ориентироваться не на слова знакомых и участников форумов. Когда учитель говорит, что такие-то формулы надо знать, таких-то правил представления решения надо придерживаться и т.д., к этим словам подростки часто относятся без особого доверия. Следует формировать у них умение ориентироваться в различных источниках информации, уметь читать и интерпретировать нормативные и иные документы (не перегружая, естественно, излишней бюрократизацией, акцентируя внимание на важной и полезной информации).

Эта рекомендация дается нами на основании опыта выступлений и открытых занятий для школьников, абитуриентов, на основании взаимодействия со школьниками на заседаниях конфликтных комиссий. Многие обучающиеся имеют туманные представления о критериях проверки, не понимают их определенности, связывают результаты проверки со случайным настроем доброй/злой комиссии. С другой стороны, если в работе решение имеет неадекватную оценку (о чем желательно проконсультироваться с учителем), школьник должен понимать, как происходит процедура апелляции. Таким образом, такая работа со школьниками будет содействовать формированию у них регулятивных умений и навыков.

Рекомендуем использовать в работе со всеми обучающимися материалы открытого банка заданий ФГБНУ «ФИПИ», которые оказывают существенную методическую помощь учителям математики. Для повышения качества образования педагогам важно изучить документы, регламентирующие разработку КИМ для ЕГЭ по математике (кодификатор элементов содержания и спецификация экзаменационной работы).

- *Муниципальным органам управления образованием*

В целях повышения качества преподавания математики в образовательных организациях необходимы:

1. Трансляция успешного опыта учителей, обеспечивающих высокое качество знаний выпускников по математике;
2. Регулярное проведение тематических муниципальных вебинаров для учителей-предметников;
3. Выявление и преодоление профессиональных дефицитов учителей-предметников в области подготовки обучающихся к ГИА;
4. Организация систематической работы по подготовке к ОГЭ и ЕГЭ для мотивированных школьников из различных регионов Иркутской области, чтобы предоставить возможность заинтересованным обучающимся получить хорошую подготовку в условиях дефицита кадров учителей;
5. Поддержка дополнительного образования учителей в рамках курсов повышения квалификации;
6. Создание условий для участия учителей математики в конкурсах профессионального мастерства.

Одним из самых сложных этапов в получении высоких результатов ЕГЭ является разработка и усвоение алгоритмов решения задач. У экзаменуемого должно быть на вооружении несколько необходимых алгоритмов решения и особенностей их использования в зависимости от условия задачи, а также понимание того, что процесс оценивания экспертами не сводится только к получению правильного результата, а к представлению определенных элементов, за которые выставляются баллы.

Во многих учебных заведениях решают стандартные варианты постановки и не обращают должного внимания на суть вопроса и исключения из правил. Причинами тому могли стать неглубокие знания предмета, формальное усвоение учебного материала, следствием которого является неумение перенести полученные знания в новую ситуацию, а также невнимательность при анализе условий заданий. Значительное количество выпускников не овладели важным практическим умением использовать полученные знания для объяснения взаимосвязи между математическими процессами, что значительно снижает результаты оценочных процедур.

Подготовка к ЕГЭ обучающихся не должна сводиться к натаскиванию на решение типичных заданий, а должна предусматривать формирование у учащихся системы знаний, поэтому рекомендуется больше учебного времени уделить вопросам систематизации знаний, решению заданий с развернутым ответом, формированию практических навыков. Это можно реализовать на дополнительных занятиях. Для учеников рекомендуется решать хотя бы один КИМ в неделю — это обязательно для формирования понимания структуры и наполнения экзаменационной работы.

4.1.2. …по организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки

У разных групп обучающихся возникают индивидуальные трудности в решении поставленных целей. Высокоинтеллектуальные и заинтересованные в результате обучающиеся хорошо усваивают различные алгоритмы решения, умеют их обобщать, находить главное и варьировать усвоенными знаниями, умениями, навыками для достижения поставленной цели. Практические навыки подтверждают и дополняют теоретические данные.

- *Учителям, методическим объединениям учителей*

Один из резервов успешности в подготовке к выполнению экзаменационной работы кроется в организации дифференцированного подхода к обучению выпускников с разным уровнем подготовки по математике. В работе необходимо использовать все возможности факультативных и элективных курсов, которые позволяют организовать групповые занятия.

Общие рекомендации по организации дифференцированного обучения школьников с разным уровнем предметной подготовки по математике:

– Индивидуализация домашнего задания слабоуспевающим обучающимся;

– Привлечение школьников к осуществлению самоконтроля при выполнении упражнений;

– Использование дополнений к тексту задания (рисунок, схема, инструкция и т.п.) с указанием алгоритма выполнения задания, особенно при тренировке в решении математических задач;

– Обучение распознаванию причинно-следственных связей, необходимых для выполнения задания.

В работе учителя важно определить стартовый уровень знаний для каждого ученика, поэтому в начале учебного года рекомендуется проводить контрольные срезы.

Исходя из результатов входного тестирования по математике, при подготовке к ЕГЭ по математике на уроке и во время внеурочных занятий рекомендуем обучающихся условно объединить в три группы. Основную часть времени стоит уделить группе обучающихся со слабой подготовкой. Необходимо сосредоточить их внимание на корректном выполнении всех заданий тестового характера, то есть повторить основы школьного курса математики. Целесообразно также делать акцент на организации работы во время экзамена. Например, распределить время так, чтобы успеть проверить ответ другим способом решения задачи, следить за правильным заполнением ответов в бланк согласно инструкциям. Ученики со сниженной мотивацией при выполнении заданий зачастую недостаточно владеют материалом. Школьникам этой группы важен алгоритм выполнения задания, который должен сложное задание сделать простым и понятным. Для этого важно научить их сложное задание разделять на элементарные составляющие и последовательно отрабатывать каждую из этих составляющих.

Работу с обучающимися со средними показателями качества знаний, как представляется, нужно организовать в подгруппе таким образом, чтобы школьники решали тестовую часть самостоятельно в своей подгруппе, советуясь и консультируясь внутри своей подгруппы, без обращения к помощи учителя на этапе решения. Затем учитель проверяет выполненные тесты, опрашивая каждого в этой подгруппе по цепочке или вразброс. Причём учащийся должен объяснить, каким образом он решил тестовое задание.

При подготовке к ЕГЭ по математике обучающихся с высокими показателями выполнения заданий необходимо подробно останавливаться на выполнении с учётом их индивидуальных затруднений. Проверку тестовой части у группы сильных учащихся рекомендовано осуществлять с помощью взаимоконтроля с последующим разъяснением неверно решённых заданий. Важно объяснить школьникам необходимость перепроверки собственного решения.

Отметим, что эти группы не являются статичными, могут быть изменены по итогам промежуточной аттестации. Как форму промежуточной аттестации рекомендовано использовать тестирование, аналогичное КИМ ЕГЭ по математике.

Таким образом, выделены основные методические рекомендации по организации дифференцированного обучения школьников с разным уровнем предметной подготовки:

1) Организовывать осознанную учебную деятельность школьников с низким и средним уровнями подготовки.

Если в силу обстоятельств школьник имеет невысокий уровень подготовки, в первую очередь он должен представлять себе, на каком уровне знаний он находится и что он может достичь за оставшийся период. Эти регулятивные действия очень важны для организации осознанной деятельности по подготовке к экзамену. Один из механизмов, который при этом следует использовать, – разъяснение структуры и содержания экзамена, описанное нами в пункте 4.1.1., следует запланировать работу над определенными заданиями и добиваться их досконального понимания, постоянно тренируясь в выполнении заданий со стандартными и нестандартными формулировками, обширно представленными в открытом банке заданий ЕГЭ по математике.

2) Обучающиеся с высоким уровнем подготовки успешно справятся с экзаменом. Рекомендуем в обучении таких школьников максимально раскрывать логическую составляющую математики, так как именно ее понимание может сыграть положительную роль в их будущей профессиональной подготовке.

- *Администрациям образовательных организаций*

Рекомендуем более активно привлекать школьников с хорошей и отличной подготовкой к написанию исследовательских и проектных работ на базах высших учебных заведений. Для обучающихся, проявляющих интерес к математике, необходимо организовывать факультативы, которые призваны углублять и расширять научные и прикладные знания выпускников в соответствии с их потребностями, приобщать их к исследовательской деятельности, создавать условия для самоопределения личности и её самореализации. Факультативы являются одной из гибких форм отражения в профессиональном образовании современных достижений науки, техники и культуры, позволяют вносить дополнения в содержание образовательных программ. Для этих целей было бы полезным приглашать ведущих преподавателей и молодых ученых вузов.

Рекомендовано поддерживать создание программ и курсов в образовательных организациях для ликвидации математической безграмотности и для продвинутого обучения (возможна организация работы с разновозрастными группами).

- *Муниципальным органам управления образованием*

Поддерживать организацию программ и курсов для ликвидации математической безграмотности и для продвинутого обучения (возможна организация работы с разновозрастными группами) на уровне муниципального образования. К реализации программы привлекать специалистов из образовательных организаций с лучшими результатами. Эта практика уже реализуется в отдельных муниципальных образованиях Иркутской области.

Обязательно рекомендуется посодействовать в ознакомлении с настоящим отчетом всех учителей-предметников для разработки тактики подготовки к ЕГЭ-2024.

Группа обучающихся с менее выраженными высоким уровнем подготовки должна быть нацелена прежде всего на правильное решение заданий первой части. Требуется очень тщательно выработать и отработать алгоритмы решения каждого задания, распланировать затрачиваемое время. Эффективным явлением является планомерное выполнение домашних заданий, направленных на закрепление пройденного материала. Необходимо проводить периодическую диагностику полученных знаний и в случае выявления пробелов незамедлительно прорабатывать сложные вопросы, используя различные литературные источники.

4.2. Рекомендации по темам для обсуждения / обмена опытом на методических объединениях учителей-предметников

Учителям-предметникам на методических объединениях мы рекомендуем обсуждение вопросов:

- Методические рекомендации «Результаты государственной итоговой аттестации в форме единого государственного экзамена по математике в Иркутской области в 2023 году», размещённые на сайте ГАУ ИО ЦОПМКиМКО.
- Формирование и оценка функциональной грамотности на уроках математики.
- Использование электронных образовательных ресурсов на уроках математики.

Возможные направления повышения квалификации учителей математики:

- Участие в диагностических процедурах с целью выявления профессиональных дефицитов и точек роста.
- Построение индивидуальных образовательных маршрутов.
- Освоение содержания дополнительных профессиональных программ повышения квалификации.
- Участие в региональных семинарах и вебинарах по выявленным профессиональным дефицитам, в том числе в вебинаре «Итоги проведения ГИА – 2023 по учебному предмету «Математика». Проблемы, задачи на 2023-2024 учебный год» (октябрь 2023 г.).
- Участие в работе регионального консультационного центра по актуальным направлениям региональной образовательной политики.

Непрерывному повышению профессионального мастерства способствуют:

- Участие в работе сетевого предметного сообщества учителей математики регионального профессионального педагогического объединения.

- Привлечение к оцениванию заданий с развернутым ответом в рамках технологического тестирования выпускников.

Использование заданий ЕГЭ, которые регулярно подготавливаются и размещаются РПК Иркутской области по математике в течение учебного года на открытом облачном диске, доступном по адресу: https://disk.yandex.ru/d/uEzPU9xhPJJjJg.

Как школьникам, так и учителям мы рекомендуем не ограничивать свой математический кругозор курсами, специализирующимися на подготовке к ЕГЭ. К примеру, многие учителя признают, что не справляются с решением задания № 18 и даже не всегда понимают ее формулировку. Научиться решению задач такого вида за несколько занятий на курсах затруднительно. Для более эффективного освоения методов подготовки к профильному ЕГЭ целесообразно расширение математического кругозора в различных областях алгебры, геометрии, математического анализа, теории чисел, комбинаторики, теории вероятностей, знакомство с методами решения задач математических олимпиад. Поэтому считаем полезным участие в следующих проектах, реализуемых в Иркутской области:

- Геометрический семинар для учителей г. Иркутска и Иркутской области.

На семинаре рассматриваются различные аспекты обучения геометрии, наглядная геометрия, комбинаторная геометрия, аналитические методы решения геометрических задач, геометрические задачи российских и зарубежных математических олимпиад и т.д. Занятия ведут ведущие и старшие эксперты региональной предметной комиссии Иркутской области, специалисты в области подготовки к школьным математическим олимпиадам.

- Межрегиональный конкурс Иркутского государственного университета для учителей и преподавателей математики.

Конкурс направлен на совершенствование профессиональных навыков педагогов в обучении мотивированных школьников к решению нестандартных заданий и задач высокого уровня сложности.

- Региональный профессиональный творческий конкурс учителей математики.

Конкурс направлен на развитие творческой деятельности учителей по обновлению и внедрению новых форм и технологий в организацию обучения, совершенствование профессиональной деятельности, направленной на содействие достижению обучающимися высоких результатов при сдаче итоговых государственных испытаний.

- Научно-практическая конференция «Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании».

Рассматриваются современные методики обучения математике, вопросы организации дополнительного математического образования, научно-исследовательской деятельности школьников, эффективной подготовки к ГИА.

Материалы этих проектов представляются на сайте кафедры математики и методики обучения математике Педагогического института Иркутского государственного университета

https://sites.google.com/view/mimom/%D0%B3%D0%BB%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F-%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B0/%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BE%D0%BF%D1%80%D0%B8%D1%8F%D1%82%D0%B8%D1%8F?authuser=0

- Региональная научно-практическая конференция «Опыт, проблемы и перспективы естественно-математического образования» (ГАУ ДПО ИРО)
- Другой доступный ресурс для самообразования учителей и школьников – это образовательный центр «Сириус», в рамках которого организуются:
  - Дистанционные открытые курсы для учителей и школьников по геометрии, комбинаторике и т.д.
  - Математические образовательные смены для учителей и школьников.

4.3. Рекомендации по возможным направлениям повышения квалификации работников образования для включения в региональную дорожную карту по развитию региональной системы образования

Для организации эффективной работы рекомендуем учителям математики проходить диагностику предметных компетенций для выявления собственных дефицитов и принятия мер для их преодоления. Учредителям образовательных организаций рекомендуется направить учителей школ, продемонстрировавших низкие результаты, и школ, демонстрирующих снижение результатов, на курсы повышения квалификации в зависимости от выявленных профессиональных дефицитов.

Рекомендуется провести для всех учителей математики региона мероприятия (курсы повышения квалификации, семинары) по осмыслению основных ошибок, которые совершают экзаменуемые на ЕГЭ. Для решения заданий второй части ЕГЭ существует ряд правил и тонкостей, на которых одиннадцатиклассники теряют баллы, а учителя не могут или не хотят обращать внимание на особенности ЕГЭ по профильной математике. Среди них правильность указания обоснований каких-либо утверждений, правильность вычислений, принципы оценивания решения задач и многое другое.