Министерство образования Иркутской области
Государственное автономное учреждение Иркутской области
«Центр оценки профессионального мастерства, квалификаций педагогов и мониторинга качества образования»

Методический анализ результатов ЕГЭ по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень) в Иркутской области в 2025 году

Иркутск, 2025

Методический анализ результатов ЕГЭ[1]
по математике

Раздел 1. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КИМ

1.1.Анализ выполнения заданий КИМ

1.1.1. Статистический анализ выполнения заданий КИМ в 2025 году

1.1.1.1. Основные статистические характеристики выполнения заданий КИМ в 2025 году

Основные статистические характеристики выполнения заданий в целом представлены в Таб.2-13. Информация о результатах оценивания выполнения заданий, в том числе в разрезе данных о получении того или иного балла по критерию оценивания выполнения каждого задания КИМ представлена в Таб. 2-14.

Таблица 0-1

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[2] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
1	Умение оперировать понятиями: плоский угол, площадь фигуры, подобные фигуры; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы	Б	85,39	35,28	80,53	96,12	98,41

[1] Для анализа использовался массив результатов основного дня основного периода ЕГЭ

[2] Вычисляется по формуле $p = \frac{N}{nm} \cdot 100\%$, где N – сумма первичных баллов, полученных всеми участниками группы за выполнение задания, n – количество участников в группе, m – максимальный первичный балл за задание.

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[2] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
	планиметрии; умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь), используя изученные формулы и методы						
2	Умение оперировать понятиями: вектор, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение, угол между векторами	Б	91,19	45,02	90,64	98,19	98,21
3	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, величина угла, плоский угол, двугранный угол, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, объём фигуры, площадь поверхности; умение использовать геометрические отношения при решении задач; умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объём, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии	Б	68,92	10,17	49,83	91,91	98,21
4	Умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность	Б	89,99	52,38	88,21	96,7	97,21
5	Умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, комбинаторные факты и формулы	П	47,24	4,98	27,52	65,99	88,05
6	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приёмов	Б	96,4	66,02	97,68	99,64	99,8

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[2] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
7	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений	Б	76,38	24,68	64,13	93,15	97,01
8	Умение оперировать понятиями: функция, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке, производная функции, первообразная; находить уравнение касательной к графику функции; умение находить производные элементарных функций; умение использовать производную для исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций; находить площади фигур с помощью интеграла	Б	70,26	13,85	52,27	91,84	99,4
9	Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов	П	81,9	12,12	74,99	97,1	99,4
10	Умение решать текстовые задачи разных типов, составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов	П	71,11	9,31	54,17	93	97,81
11	Умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения уравнений	П	66,92	4,11	43,17	94,53	99,4
12	Умение оперировать понятиями: экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение находить производные элементарных функций; умение использовать производную для	П	71,42	9,09	55,75	92,2	98,01

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[2] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
	исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций						
13	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приёмов	П	34,69	0	2,27	60,5	97,31
14	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, отрезок, луч, величина угла, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; площадь фигуры, объём фигуры, многогранник, поверхность вращения, площадь поверхности, сечение; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения; использовать геометрические отношения при решении задач; находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объём, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии	П	4,54	0	0,22	3,34	38,31
15	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приёмов	П	10,97	0	0,13	9,88	84,76
16	Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры,	П	13,1	0	0,26	15,75	78,88

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[2] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
	интерпретировать полученный результат; умение решать текстовые задачи разных типов, в том числе задачи из области управления личными и семейными финансами						
17	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, отрезок, луч, величина угла; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии, использовать геометрические отношения при решении задач; умение находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь), используя изученные формулы и методы	П	3,27	0	0,04	1,33	34,13
18	Умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приёмов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами	В	1,14	0	0	0,25	13,15
19	Владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение приводить примеры и контрпримеры, проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений; умение оперировать понятиями: множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел, остаток по модулю; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и	В	5,55	0,05	1,45	7,41	22,16

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[2] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
	наименьшее общее кратное; умение выбирать подходящий метод для решения задачи						

Таблица 0-2

Номер задания / критерия оценивания в КИМ	Количество полученных первичных баллов	Процент участников экзамена в Иркутской области, получивших соответствующий первичный балл за выполнения задания в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки			
		в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б., %	в группе от 61 до 80 т.б., %	в группе от 81 до 100 т.б., %
1	X	1,95	0,34	0	0
1	0	62,77	19,13	3,88	1,59
1	1	35,28	80,53	96,12	98,41
2	X	2,38	0,34	0,07	0
2	0	52,6	9,02	1,74	1,79
2	1	45,02	90,64	98,19	98,21
3	X	17,97	6,85	0,58	0
3	0	71,86	43,32	7,51	1,79
3	1	10,17	49,83	91,91	98,21
4	X	0,43	0,07	0	0
4	0	47,19	11,72	3,3	2,79

Номер задания / критерия оценивания в КИМ	Количество полученных первичных баллов	Процент участников экзамена в Иркутской области, получивших соответствующий первичный балл за выполнения задания в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки			
		в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б., %	в группе от 61 до 80 т.б., %	в группе от 81 до 100 т.б., %
4	1	52,38	88,21	96,7	97,21
5	X	2,6	0,56	0,22	0
5	0	92,42	71,92	33,79	11,95
5	1	4,98	27,52	65,99	88,05
6	X	0,43	0	0	0
6	0	33,55	2,32	0,36	0,2
6	1	66,02	97,68	99,64	99,8
7	X	6,06	1,16	0,04	0
7	0	69,26	34,71	6,82	2,99
7	1	24,68	64,13	93,15	97,01
8	X	12,77	5,32	0,25	0
8	0	73,38	42,42	7,9	0,6
8	1	13,85	52,27	91,84	99,4
9	X	10,61	1,12	0	0
9	0	77,27	23,89	2,9	0,6
9	1	12,12	74,99	97,1	99,4
10	X	24,46	8,27	0,44	0,2
10	0	66,23	37,55	6,56	1,99
10	1	9,31	54,17	93	97,81
11	X	23,81	9,51	0,25	0
11	0	72,08	47,32	5,22	0,6
11	1	4,11	43,17	94,53	99,4
12	X	24,68	4,61	0,07	0
12	0	66,23	39,65	7,72	1,99

Номер задания / критерия оценивания в КИМ	Количество полученных первичных баллов	Процент участников экзамена в Иркутской области, получивших соответствующий первичный балл за выполнения задания в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки			
		в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б., %	в группе от 61 до 80 т.б., %	в группе от 81 до 100 т.б., %
12	1	9,09	55,75	92,2	98,01
13	X	89,39	68,25	17,91	0,2
13	0	10,61	28,64	18,67	2,19
13	1	0	1,68	5,87	1
13	2	0	1,42	57,54	96,61
14	X	91,13	81,06	65,77	27,09
14	0	8,87	18,27	25,71	16,14
14	1	0	0,67	7,51	26,1
14	2	0	0	0,58	3,59
14	3	0	0	0,44	27,09
15	X	89,61	73,76	38,69	3,59
15	0	10,39	26,1	51,31	11,16
15	1	0	0,04	0,25	1
15	2	0	0,11	9,75	84,26
16	X	89,39	81,51	48,19	2,79
16	0	10,61	18,08	34,12	14,34
16	1	0	0,3	3,95	8,37
16	2	0	0,11	13,74	74,5
17	X	89,83	83,53	73,13	31,87
17	0	10,17	16,36	23,31	16,33
17	1	0	0,11	3,3	26,29
17	2	0	0	0,15	1,39
17	3	0	0	0,11	24,1
18	X	92,42	86,75	71,46	25,3

Номер задания / критерия оценивания в КИМ	Количество полученных первичных баллов	Процент участников экзамена в Иркутской области, получивших соответствующий первичный балл за выполнения задания в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки			
		в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б., %	в группе от 61 до 80 т.б., %	в группе от 81 до 100 т.б., %
18	0	7,58	13,25	27,59	47,41
18	1	0	0	0,83	15,14
18	2	0	0	0,11	5,98
18	3	0	0	0	0,4
18	4	0	0	0	5,78
19	X	76,41	61,18	36,48	10,56
19	0	23,38	33,06	34,48	14,14
19	1	0,22	5,73	28,46	66,33
19	2	0	0,04	0,58	6,97
19	3	0	0	0	0,2
19	4	0	0	0	1,79

1.1.1.2. Выявление сложных для участников ЕГЭ заданий

Из двенадцати заданий первой части 7 заданий базового уровня (№№ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8), с ними выпускники справились довольно успешно – самый низкий процент выполнения у задания № 3 (68,92%), то есть процент выполнения всех заданий выше 65%. С заданиями повышенного уровня сложности из первой части (№№ 5, 9, 10, 11, 12) справились тоже неплохо, самый низкий процент выполнения у задания № 5 – 47,24%, у остальных процент выполнения также выше 65%. Для выполнения 5 задания надо знать теоремы из теории вероятностей (о полной вероятности, условной вероятности, вероятности пересечения и объединения событий) и, в связи с включением этого предмета в учебный план, есть надежда на некоторое повышение уровня результатов в будущем (при условии, что учителя будут использовать время по назначению, а не затыкать дыры в других предметах).

Из семи заданий второй части менее, чем 15% участников решены все задачи, кроме № 13. Традиционно низкие баллы по геометрическим заданиям (№ 14 – 4,54%, № 17 – 3,27%), задаче с параметрами (№ 18 – 1,14%) и задаче № 19

– 5,55%. Но неожиданно низкими оказались результаты по задачам с алгебраическим содержанием: задание № 15 решило 10,97% выпускников, задание № 16 – 13,1% (в 2024 году было 21,1% и 16,4% соответственно).

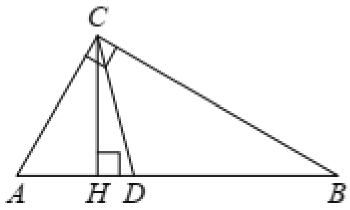
Анализ выполнения заданий КИМ по группам участников ЕГЭ с разными уровнями подготовки

Группа участников, не достигших минимального балла	Группа участников с результатами от минимального до 60 т. б.	Группа участников с результатами от 61 т. б. до 80 т. б.	Группа участников с результатами от 81 т. б. до 100 т. б.
Относительно успешно справились только с заданием № 4 (базовый уровень – вероятность) – 52,38% и задание № 6 (базовый уровень – решение уравнения) – 66,02%. Все остальные показатели по заданиям базового уровня ниже 45%. Задания повышенного уровня сложности из первой части были решены ниже, чем на 15%. По всем заданиям второй части у данной категории участников 0% выполнения. Исключение составляет задание № 19 (0,05%) Это обусловлено тем, что на пункт а) задания №19 ответ был «да», и достаточно было привести подходящий пример.	Эта категория школьников плохо справилась с одним заданием базового уровня части 1 (№ 3 – 49,83%). Низкие проценты выполнения задач повышенного уровня первой части: № 5 (вероятность – 27,52%), № 11 (функции – 43,17%). Проценты выполнения заданий части 2 с развернутыми ответами находятся в диапазоне 0-3%.	Успешно справились с заданиями части 1. В части 2 эта группа школьников не справилась с геометрическими заданиями (№ 14 – 3,34%, № 17 – 1,33%). То, что с геометрическими заданиями второй части столь плохо справились даже представители этой категории (с довольно хорошими результатами), еще раз свидетельствует о плохо сформированных в целом геометрических знаниях. Низкие результаты у этой группы также и в задаче с параметром № 18 (0,25%), № 19 (7,41%), № 15 (9,88%). Изменение среднего процента выполнения этих заданий связано именно с этой категорией школьников. Первые две категории эти задания не делают почти никогда,	Успешно справились со всеми заданиями части 1. В части 2 самыми трудными оказались задания № 14 (стереометрия) и № 17 (планиметрия) – 38,31% и 34,13% соответственно. Низкий процент решивших задачу с параметрами № 18 (13,15%) и № 19 (22,16%).

		последняя – почти всегда. Поэтому небольшое упрощение или усложнение их математической фабулы сказывается в основном на обучающихся среднего уровня с 61-80 т. б.	

1.1.2. Содержательный анализ выполнения заданий КИМ

Задание № 1.



Острый угол *B* прямоугольного треугольника *ABC* равен 25°. Найдите величину угла между высотой *CH* и биссектрисой *CD*, проведёнными из вершины прямого угла *C*. Ответ дайте в градусах.

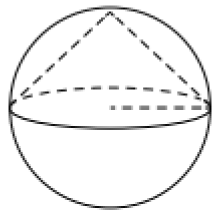
Ответ: 20. Наиболее распространённые неверные ответы 40 (2,1%) и 25 (угол *ACH*, 1,8%). Результаты получены либо из-за невнимательности, либо незнания свойств треугольника.

Задание № 2.

Даны векторы $\vec{a}$ (8; 9) и $\vec{b}$ (4; – 3). Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 5. Наиболее распространённый неверный ответ 72 (1,3%) – произведение координат вектора $\vec{a}$ (незнание определения скалярного произведения)

Задание № 3.



Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $84\sqrt{2}$. Найдите длину образующей конуса.

Ответ: 168. Наиболее распространённый ответ 84 (7,7%) – вместо умножения на $\sqrt{2}$ произведено деление. Скорее всего, это ошибка в формуле связи гипотенузы и катета равнобедренного прямоугольного треугольника.

Задание № 4.

На олимпиаде по химии 300 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: 0,2. Наиболее распространённый неверный ответ 0,6 (5,9%) получается, если считать вероятность исходя из условия, что в двух аудиториях 120, а не 240 человек. При чтении пропущен предлог «по». Можно объяснить невнимательностью при прочтении задачи.

Задание № 5.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,07. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Ответ: 0,67. Наиболее распространённый неверный ответ 0,93 (10,9%) – вероятность того, что кофе не закончится хотя бы в одном автомате. Второй по распространённости неверный ответ 0,53 (9,0%) – получается при вычитании из 1 вероятностей всех событий из условия.

Наиболее вероятными причинами неверного ответа является несформированность следующих умений:

- умения моделировать реальную ситуацию на языке теории вероятностей;
- умения осуществлять полный перебор вариантов событий;
- вычислительных умений.

Задание № 6.

Найдите корень уравнения $7^{11-x} = 49$.

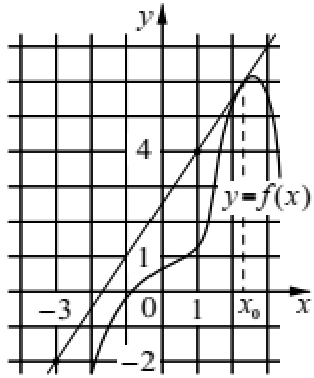
Ответ: 9. Незначительное число неверных ответов.

Задание № 7.
Найдите значение выражения

$$\frac{\log_6 17}{\log_{36} 17}.$$

Ответ: 2. Самый распространённый неправильный ответ 0,5 (15,6%) и 6 (4,2%) (неверное преобразование логарифма в знаменателе)

Задание № 8.
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



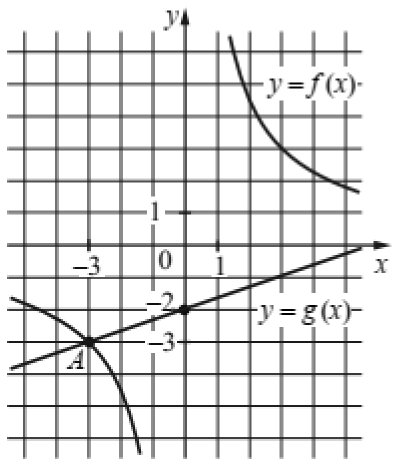
Ответ: 1,5. Самый распространённый неправильный ответ 6 (5,1%), получающийся, если вместо значения производной найти значение функции, аналогичная проблема была и в прошлом году.
Наиболее вероятными причинами неверного ответа можно предполагать:
- отсутствие навыков работы с графиком производной функции;
- несформированность умения определять значение производной с помощью касательной.

Задание № 9.
Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 2500$ км/ч^2. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l – пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 50 км/ч.
Ответ: 0,5. Самый распространённый неправильный ответ 2 (4,3%), получается при неверном решении иррационального уравнения.
Наиболее вероятными причинами неверных ответов являются:
- невнимательность при прочтении условия задачи;

 - несформированность умения работать с формулой как математической моделью реальной ситуации;
- вычислительные ошибки.

Задание № 10.
От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 285 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 4 часа после этого следом за ним со скоростью на 4 км/ч больше отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.
<u>Ответ:</u> 15. Самый распространённый неправильный ответ 19 (2,6%) получается либо при неверном решении квадратног уравнения, либо при вычислении скорости не того теплохода. 6,1% не дали ответ.
Наиболее вероятными причинами неверного ответа можно предполагать:
 - несформированность умений решать задачи на движение;
- неверная интерпретация условия задачи;
- вычислительные ошибки.

Задание № 11.
На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$,пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.
<u>Ответ:</u> 9. Среди наиболее частых неправильных ответов 8 (5,5%). Складывается впечатление об угадывании ответа по графику. Не ответили 6,2%



Задание № 12.
Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 30x^2 + 225x + 23$.
<u>Ответ:</u> – 15. Наиболее распространенный неправильный ответ – 5 (7,5%), это точка минимума, выбрана не та точка из двух возможных точек экстремума. 5,8% не дали ответ на задачу.

Часть 2

Рассмотрим далее более подробно задания второй части ЕГЭ-2025 нашего региона (из открытого варианта). Выделим типичные ошибки выпускников по каждому из заданий 13-19, и приведём примеры решений некоторых выпускников нашего региона.

Задание № 13.

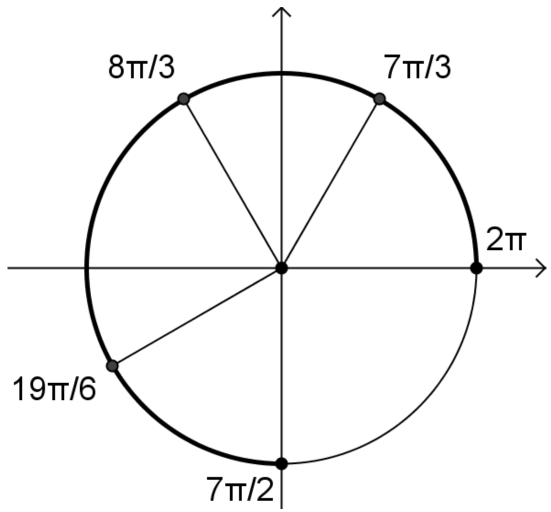
а) Решите уравнение $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4(1 - \sin^2 x) = \sqrt{3} - 4;$$
$$4\sin^2 x - 2\left(\sqrt{3} - 1\right)\sin x - \sqrt{3} = 0;$$
$$\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)(2\sin x + 1) = 0.$$



Значит, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$, или $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi l,\ l \in Z$, или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$ и $\frac{19\pi}{6}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z,\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi l,\ l \in Z,\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z,\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$ и $\frac{19\pi}{6}$.

Типичные ошибки

1) Ошибки при решении квадратного уравнения

2) Ошибки в формулах решения простейших тригонометрических уравнений.

3) Ошибки в отборе корней.

4) Вычислительные ошибки

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 1)

№13

а) $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x \cancel{-4} + 4\sin^2 x = \sqrt{3} \cancel{-4} \quad |\cdot(-1)$

$-2\sin x + 2\sqrt{3}\sin x - 4\sin^2 x = -\sqrt{3}$

$-2\sin x\,(1 - \sqrt{3} + 2\sin x) = -\sqrt{3}$

$-2\sin x = -\sqrt{3}$ $\qquad 1 - \sqrt{3} + 2\sin x = -\sqrt{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\qquad \sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$ $\qquad x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k.$

$x_4 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k.$

1) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

б) $\frac{2\pi}{1} \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{7\pi}{2} \quad |:\pi$

$\frac{2}{1} \le \frac{1}{3} + 2k \le \frac{7}{2} \quad |\cdot 6$

$12 \le 2 + 12k \le 21 \quad |-2$

$10 \le 12k \le 19$

$\frac{10}{12} \le k \le \frac{19}{12}$

$k = 1$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}.$

2) $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$2\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{7\pi}{2} \quad |:\pi$

$2 \le \frac{2}{3} + 2k \le \frac{7}{2} \quad |\cdot 6$

$12 \le 4 + 12k \le 21 \quad |-4$

$8 \le 12k \le 17$

$\frac{8}{12} \le k \le 1\frac{5}{12}$

$k = 1$

$x = \frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$

3) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$2\pi \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le \frac{7\pi}{2} \quad |:\pi$

$2 \le -\frac{1}{6} + 2k \le \frac{7}{2} \quad |\cdot 6$

$12 \le -1 + 12k \le 21 \quad |+1$

$13 \le 12k \le 22$

$1\frac{1}{12} \le k \le 1\frac{10}{12}$

$k = \varnothing$

4) $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$

$2\pi \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \le \frac{7\pi}{2} \quad |:\pi$

$2 \le \frac{7}{6} + 2k \le \frac{7}{2} \quad |\cdot 6$

$12 \le 7 + 12k \le 21 \quad |-7$

$5 \le 12k \le 14$

$\frac{5}{12} \le k \le 1\frac{2}{12}$

$k = 1$

$\frac{7\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}.$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$; б) $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{3}$

Ответ почти верный. Но при решении уравнения левая часть разложена на множители при ненулевой правой части и каждый из множителей приравнен к правой части. По чистой случайности это привело к верному ответу (второй множитель при этом обращался в 1). Это не вычислительная ошибка

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 2)

№13

а) $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$ $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4(1 - \sin^2 x) = \sqrt{3} - 4$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4 + 4\sin^2 x = \sqrt{3} - 4$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x + 4\sin^2 x = \sqrt{3} - 4 + 4$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x + 4\sin^2 x = \sqrt{3} \quad /^2$

$4\sin^2 x - 12\sin^2 x + 16\sin^4 x = 3$

$16\sin^4 x - 8\sin^2 x - 3 = 0$

$\sin^2 x = t \qquad -1 \le t \le 1$

$16t^2 - 8t - 3 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-3) = 64 + 192 = 256$

$\sqrt{D} = \sqrt{256} = 16$

$t_1 = \frac{8+16}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$; $t_2 = \frac{8-16}{32} = -\frac{8}{32} = -\frac{1}{4}$

$\sin^2 x = \frac{3}{4}$ $\sin^2 x = -\frac{1}{4}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x_2 = (\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi n = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ $x_2 = -(\pi - \frac{\pi}{6}) + 2\pi n = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

б)

$2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{7\pi}{2} \quad \Big| : \pi$ $\qquad$ $2\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{7\pi}{2} \quad \Big| : \pi$

$2 \leq \frac{1}{3} + 2n \leq \frac{7}{2} \quad \Big| - \frac{1}{3}$ $\qquad$ $2 \leq \frac{2}{3} + 2n \leq \frac{7}{2} \quad \Big| - \frac{2}{3}$

$\frac{5}{3} \leq 2n \leq \frac{19}{6} \quad \Big| : 2$ $\qquad$ $\frac{4}{3} \leq 2n \leq \frac{17}{6} \quad \Big| : 2$

$\frac{5}{6} \leq n \leq \frac{19}{12}$ $\qquad$ $\frac{4}{6} \leq n \leq \frac{17}{12}$

$n = 1 \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi^{\backslash 3} = \frac{7\pi}{3}$ $\qquad$ $n = 1 \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi^{\backslash 3} = \frac{8\pi}{3}$

$2\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq \frac{7\pi}{2} \quad \Big| : \pi$ $\qquad$ $2\pi \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq \frac{7\pi}{2} \quad \Big| : \pi$

$2 \leq -\frac{1}{6} + 2n \leq \frac{7}{2} \quad \Big| + \frac{1}{6}$ $\qquad$ $2 \leq -\frac{5}{6} + 2n \leq \frac{7}{2} \quad \Big| + \frac{5}{6}$

$\frac{13}{6} \leq 2n \leq \frac{22}{6} \quad \Big| : 2$ $\qquad$ $\frac{17}{6} \leq 2n \leq \frac{26}{6} \quad \Big| : 2$

$\frac{13}{12} \leq n \leq \frac{22}{12}$ $\qquad$ $\frac{17}{12} \leq n \leq \frac{26}{12}$

$n \ \varnothing$ $\qquad$ $n = 2 \quad -\frac{5\pi}{6} + 4\pi^{\backslash 6} = \frac{19\pi}{6}$

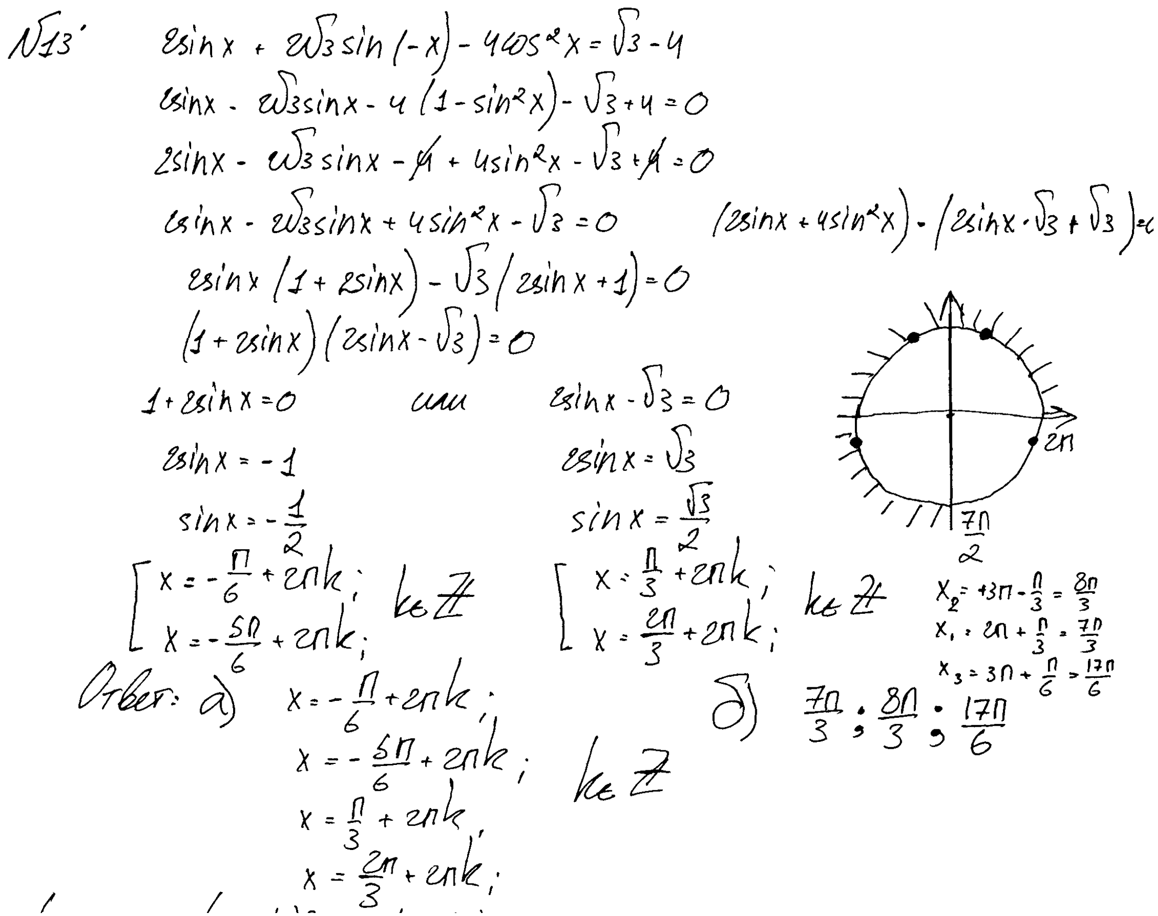
Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$;

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

б) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{6}$

В решении неверное возведение в квадрат. Затем неверное решение уравнения $\sin^2 x = -\frac{1}{4}$. Тем не менее ответ верный.
Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 3)


№13

$2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4(1 - \sin^2 x) - \sqrt{3} + 4 = 0$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - \cancel{4} + 4\sin^2 x - \sqrt{3} + \cancel{4} = 0$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x + 4\sin^2 x - \sqrt{3} = 0$ $\quad (2\sin x + 4\sin^2 x) - (2\sin x \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}) = 0$

$2\sin x(1 + 2\sin x) - \sqrt{3}(2\sin x + 1) = 0$

$(1 + 2\sin x)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$1 + 2\sin x = 0$ или $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$2\sin x = -1$ $\quad 2\sin x = \sqrt{3}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ $\quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \end{array}\right. \; k \in Z$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \end{array}\right. \; k \in Z$

$x_2 = +3\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

$x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

$x_3 = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $k \in Z$

б) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{17\pi}{6}$

Первая часть решена верно. При отборе корней на окружности допущена вычислительная ошибка
Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 4)

13. $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4,$

$\sin(-a) = -\sin(a)$

$2\sin x + (-2\sqrt{3}\sin x) - 4\cos^2 x - \sqrt{3} + 4 = 0$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$ $-4\cos^2 x + 4 = 4\sin^2 x$

$4\sin^2 x + 2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} \cancel{+4} = 0$

$t = \sin x$

$4t^2 + (2 - 2\sqrt{3})t - (\sqrt{3} \cancel{+4}) = 0$

$2t^2 + (1 - \sqrt{3})t - (\frac{\sqrt{3}}{2} \cancel{+2}) = 0$

$t^2 + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})t + (-\frac{\sqrt{3}}{4}) = 0.$

По теореме Виета, $t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$, $t_1 \cdot t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$. $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}.$ $x = \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi; -\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$

а) Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б). Ответ: $2\pi + \frac{\pi}{3}$, $2\pi + \frac{\pi}{6}$, $2\pi + \frac{7}{6}\pi$.

Задача решена не разложением на множители, как у большинства решавших задачу, а с помощью теоремы Виета. Нет отбора корней, один из корней в ответе второго пункта неверен.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 5)

№ 13

а) $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4(1-\sin^2 x) - \sqrt{3} + 4 = 0$

$\sin x(2 - 2\sqrt{3}) \cancel{-4} + 4\sin^2 x - \sqrt{3} \cancel{+4} = 0$

$4\sin^2 x + \sin x(2 - 2\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 0$

$\sin x = y \quad -1 \geq y \geq 1$

$4y^2 + (2 - 2\sqrt{3})y - \sqrt{3} = 0$

$D = (2 - 2\sqrt{3})^2 - 4(-\sqrt{3}) \cdot 4 =$

$= 4 - 8\sqrt{3} + 12 + 16\sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3}$

$y = \dfrac{2\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{16 + 8\sqrt{3}}}{8}$

~~sin~~ $\sin x = \dfrac{2\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{16 + 8\sqrt{3}}}{8}$

$x = \arcsin \dfrac{2\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{16 + 8\sqrt{3}}}{8} + 2\pi n$

$x = \pi - \arcsin 2\sqrt{3} - 2 \pm$

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin \dfrac{2\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{16 + 8\sqrt{3}}}{8} + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin \dfrac{2\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{16 + 8\sqrt{3}}}{8} + 2\pi n \end{array}\right.$$

Задача решена через дискриминант, при этом корни не упрощены. По этой причине не удалось сделать отбор. И, хотя корни оставлены без упрощения, за решение может быть поставлен 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 6)

(13) $2\sin x + 2\sqrt{3}\cdot\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$ $\quad [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4(1-\sin^2 x) - \sqrt{3} + 4 = 0$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4 + 4\sin^2 x - \sqrt{3} + 4 = 0$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x + 4\sin^2 x - \sqrt{3} = 0$

пусть $t = \sin x$:

$2t - 2\sqrt{3}t + 4t^2 - \sqrt{3} = 0$

$4t^2 + 2t - 2\sqrt{3}t - \sqrt{3} = 0$

$2t(2t+1) - \sqrt{3}(2t+1) = 0$

$(2t-\sqrt{3})(2t+1) = 0$

$2t = \sqrt{3}$ $\qquad$ $2t = -1$

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $t = -\frac{1}{2}$

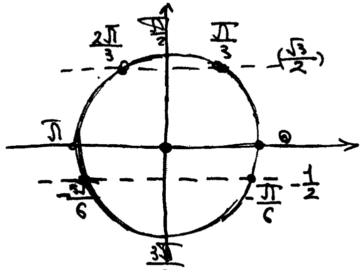
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

ОДЗ:

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$



$[2\pi; \frac{7\pi}{2}] \Leftrightarrow [\frac{12\pi}{6}; \frac{21\pi}{6}]$

1) $(\frac{\sqrt{3}}{2})$ 1. $2\pi \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant \frac{7\pi}{2}\ |:\pi|\cdot 6$

$12 \leqslant 2 + 12k \leqslant 21$

$10 \leqslant 12k \leqslant 19$

$\frac{10}{12} \leqslant k \leqslant \frac{19}{12}$ – $k = 1$

2. $2\pi \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant \frac{7\pi}{2}\ |:\pi|\cdot 6$

$12 \leqslant 4 + 12k \leqslant 21$

$8 \leqslant 12k \leqslant 17$

$\frac{8}{12} \leqslant k \leqslant \frac{17}{12}$ – $k = 1$

$(-\frac{1}{2})$ 1. $2\pi \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant \frac{7\pi}{2}\ |:\pi|\cdot 6$

$12 \leqslant -1 + 12n \leqslant 21$

$13 \leqslant 12n \leqslant 22$

$\frac{13}{12} \leqslant n \leqslant \frac{22}{12}$ – нету целых значен. n

$(-\frac{1}{2})$ 2. $2\pi \leqslant -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant \frac{7\pi}{2}\ |:\pi|\cdot 6$

$12 \leqslant -5 + 12n \leqslant 21$

$17 \leqslant 12n \leqslant 26$

$\frac{17}{12} \leqslant n \leqslant \frac{26}{12}$ – $n = 2$

2) $n = 2$:

1. $-\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{-\pi + 24\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$ – не

2. $-\frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{-5\pi + 24\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$ входит

$k = 1$: 1. $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi + 6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} = \frac{14\pi}{6}$ входит

2. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi + 6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} = \frac{16\pi}{6}$ – входит

входит

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$

б) $\cancel{\frac{14\pi}{6}}$; $\cancel{\frac{16\pi}{6}}$; $\cancel{\frac{19\pi}{6}}$ $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{3}$

Верно решены оба пункта. Отбор корней произведён тремя способами: на окружности; с помощью неравенств; с помощью перебора (недолёт-перелёт). При записывании ответа допущена описка. Тем не менее оценка – 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 7)

13)

а) $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x + 4(1-\cos^2 x) - \sqrt{3} = 0$

$2\cdot 2\sin^2 x + 2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} = 0$

$2\sin x(2\sin x + 1) - \sqrt{3}(2\sin x + 1) = 0$

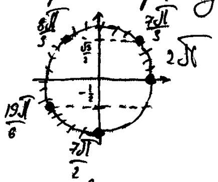
$(2\sin x + 1)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x + 1 = 0 \\ 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi r,\ r \in Z \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi f,\ f \in Z \end{array}\right.$$

б) Используя единичную тригонометрическую окружность, подберем корни принадлежащие к промежутку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$



$\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{6}$

Ответ: а) $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi r,\ r \in Z \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi f,\ f \in Z \end{array}\right.$ б) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{6}$

В решении верно выполнены оба пункта.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 8)

№ 13

а) $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4(1 - \sin^2 x) = \sqrt{3} - 4$

$\sin x \cdot (2 - 2\sqrt{3}) - 4 + 4\sin^2 x = \sqrt{3} - 4$

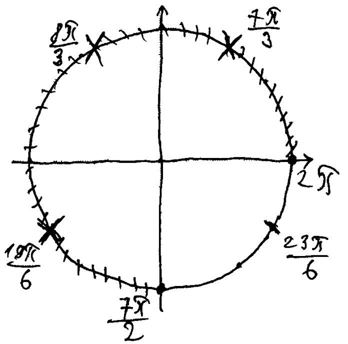
$4\sin^2 x + \sin x \cdot (2 - 2\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 0$

$D = (2 - 2\sqrt{3})^2 + 4 \cdot 4\sqrt{3} = 4 + 12 - 8\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = 4 + 8\sqrt{3} + 12 = (2 + 2\sqrt{3})^2$

$$\sin x = \frac{2\sqrt{3} - 2 \pm (2 + 2\sqrt{3})}{8} = \left[\begin{array}{l} \frac{2\sqrt{3} - 2 + 2 + 2\sqrt{3}}{8} \\ \frac{2\sqrt{3} - 2 - 2 - 2\sqrt{3}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$ – ответ а

б) $x \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$



Подходят: $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{6}$ – ответ б

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{6}$

В решении верно выполнены оба пункта. Решение квадратного уравнения сделано через дискриминант с упрощением сложных радикалов.

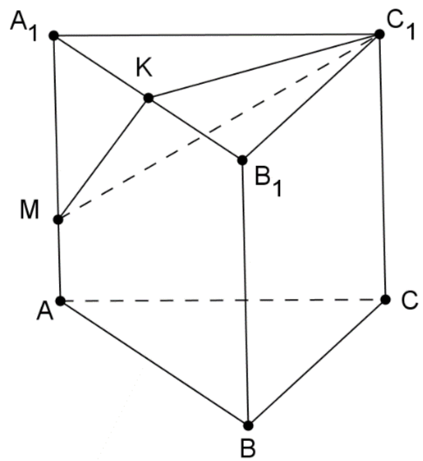
Оценка эксперта: 2 балла.

Задание № 14.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на рёбрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $A_1M = 2MA$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно плоскости грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1. б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все рёбра призмы равны 12.

Решение



а) В равностороннем треугольнике $A_1B_1C_1$ медиана C_1K является высотой. Значит, прямая C_1K перпендикулярна прямой A_1B_1. Прямые C_1K и AA_1 тоже перпендикулярны, поскольку прямая AA_1 перпендикулярна плоскости $A_1B_1C_1$. Следовательно, прямая C_1K перпендикулярна плоскости грани ABB_1A_1. Таким образом, плоскость α, перпендикулярная плоскости грани ABB_1A_1 и проходящая через точку K, содержит прямую C_1K, то есть проходит через точку C_1.

б) Сечением призмы плоскостью α является треугольник C_1KM с прямым углом C_1KM. В равностороннем треугольнике $A_1B_1C_1$ высота C_1K равна $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1 = 6\sqrt{3}$. В прямоугольном треугольнике KA_1M найдём катеты $A_1M = \frac{2}{3}AA_1 = 8$, $A_1K = \frac{1}{2}A_1B_1 = 6$. По теореме Пифагора $MK = \sqrt{A_1M^2 + A_1K^2} = 10$.

Следовательно, площадь прямоугольного треугольника C_1KM равна $\frac{1}{2} \cdot C_1K \cdot MK = 30\sqrt{3}$.

Ответ: б) $30\sqrt{3}$.

Типичные ошибки

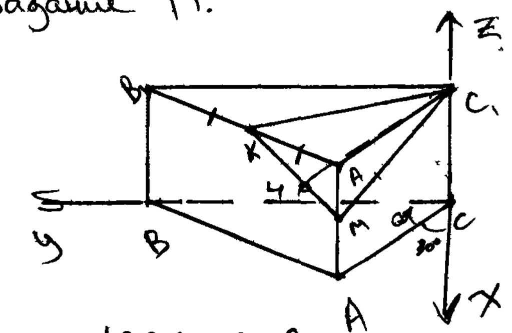
1) Ошибки в доказательстве перпендикулярности прямой и плоскости.

2) Ошибки при введении системы координат.

3) Вычислительные ошибки

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 9)

~~14~~ Задание 14.



1) Впишем $ABCA_1B_1C_1$ в сист. xyz

2) AM т.к. призма прав ⇒ $\triangle ABC$ - прав ⇒ $\angle BCA = 60°$ (усл)

$\angle(y^\wedge x) = 90° \Rightarrow \angle(AC^\wedge x) = 30°$ $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{2}; \frac{a}{3}\right)$

14) $K\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a\right)$ $C_1(0; 0; a)$ б) при усл. пункта а C_1K – выс

$C_1K = 6$; $MK = \sqrt{30}$ ⇒ $S_{сеч} = \cancel{6\sqrt{20}} = \sqrt{1080} = 6\sqrt{30}$

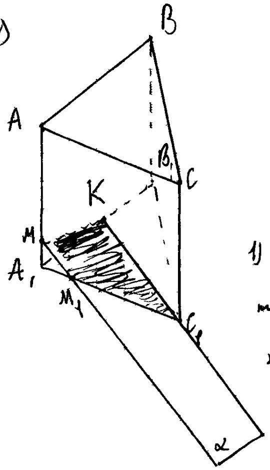
Ответ: $6\sqrt{30}$

В решении рассматривается только второй пункт. Применён метод координат. При этом абсцисса точки M найдена неверно. Тем самым, модель построена неверно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 10)

14 а)



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – пр. треуг. призма, $MK = KB$, $AM = 5MA_1$, $\alpha \perp ABB_1A_1$

Доказать: α проходит через C_1

Доказательство:

1) Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$:

т. к. $\Delta A_1B_1C_1$ является осн. $ABCA_1B_1C_1$ – пр. пр. призмы $\Rightarrow$ $\Delta A_1B_1C_1$ – правильный (свойство ~~призмы~~ призмы)

т. к. $\Delta A_1B_1C_1$ правильный, все его стороны и углы будут равны (свойство прав. треугольника)

2) Проведём перпендикуляр KC_1

так как т. K середина стороны A_1B_1 треуг-ка $A_1B_1C_1$, то $A_1B_1 \perp$ ~~$A_1B_1C_1$~~ т. C_1 и будет являться высотой треуг. $A_1B_1C_1$ (свойство прав. треуг.)

3) т. к. KC_1 является высотой $\Delta A_1B_1C_1$, то тогда и плоскость, которая пересекает KC_1 (по ~~сво~~ свойству призмы плоскости) будет $\perp C_1$ и проходит через неё.

~~Ч~~ ч. т. д.

б) Отметим точку M_1

~~т~~ т. к. $MM_1 \perp A_1ABB_1$, то ~~=~~ $MM_1 \parallel KC_1$ (по свойству плоскости)

$\Rightarrow MKC_1 = M_1MK = 90^\circ \Rightarrow$ четырёхугольник KC_1M_1M – прямоугольная трапеция.

По теореме Пифагора

$KC_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1K_1} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 2\sqrt{27}$

$MK = \sqrt{A_1M + A_1K} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$S_{KC_1M_1M} = \frac{1}{2} KC_1 \cdot MK = 2\sqrt{27} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{2} = 6\sqrt{30}$

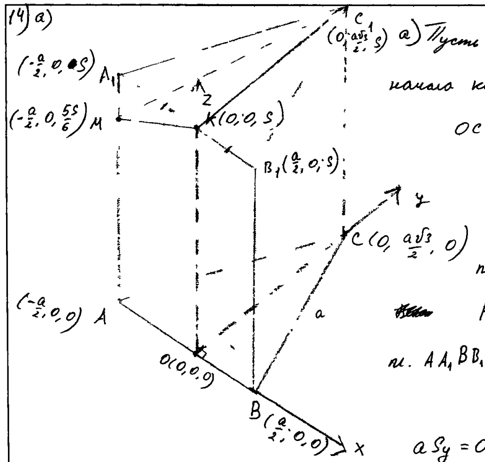
б) Ответ: $6\sqrt{30}$

Сечение построено неверно. Не доказан пункт а). В пункте б) площадь трапеции ищется, как площадь треугольника. Ответ верный.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 11)

14) а)



а) Пусть точка O - середина AB - точка начала координат.

$OC=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt3}{2}$

Плоскость α задается уравнением:

$Ax+By+Cz+D=0$.

пл. α ⊥ пл. AA_1B_1B => $n(\alpha)\cdot n(A_1AB_1B)=0$

$\overline{AA_1}=(0;0;s)$; $\overline{AB}=(a,0;0)$

пл. AA_1BB_1 = $\begin{vmatrix} x+\frac a2 & y & z \\ 0 & 0 & s \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}=(x+\frac a2)\cdot 0-y(-as)+z(0)=aSy$

$aSy=0$; $\bar n=(0,aS,0)$

пл. α: $\begin{cases} A\cdot 0+B\cdot aS\cdot C\cdot 0=0 \\ CS+D=0 \\ -\frac a2 A+\frac{5S}{6}+D=0 \end{cases}$ $\begin{cases} B=0 \\ \frac a2 A+\frac S6 C=0 \end{cases}$ $\begin{cases} B=0 \\ C=-\frac{a6}{2S}A=-\frac{3a}{S}A \end{cases}$

$D=-CS=3aA$; => пл α: $Ax-\frac{3a}{S}Az+3aA=0$; $Sx-3az+3aS=0$

~~Точка $C_1(0,\frac{a\sqrt3}{2},S)$~~ Найдем координаты пересечения пл α и прямой B_1C_1

Каноническое уравнение прямой: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$

параметрическое уравнение прямой: $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

$\overline{B_1C_1}=(-\frac a2;\frac{a\sqrt3}{2};0)$

прямая B_1C_1

$\frac{x-\frac a2}{-\frac a2}=\frac{y}{\frac{a\sqrt3}{2}}=\frac{z-S}{0}=t$; $\begin{cases} x=\frac a2-\frac a2 t \\ y=\frac{a\sqrt3}{2}t \\ z=s \end{cases}$ $\begin{array}{|l} Sx-3az+3aS=0 \\ \frac{Sa}{2}-\frac{Sa}{2}t-3aS+3aS=0 \Rightarrow t=1 \end{array}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{a\sqrt3}{2} \\ z=S \end{cases}$ - координаты точки пересечения пл α и прямой B_1C_1.

Совпадают с точкой C_1 => C_1 принадлежит пл. α.

(14) б) $a = S = 12$

$S_{MKC_1} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle MKC_1 \cdot MK \cdot KC_1$; $\overline{KM} = (-6; 0; -2)$; $\overline{KC_1} = (0; 6\sqrt{3}; 12)$

$\cos\angle MKC_1 = \frac{\overline{KM} \cdot KC_1}{|KM| \cdot |KC_1|} = \frac{-6 \cdot 0 + 6\sqrt{3} \cdot 0 - 12 \cdot 2}{\sqrt{36+4}\,\sqrt{36 \cdot 3 + 144}} = -\frac{24}{2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{70}}$ => т.к.

$\angle MKC_1 < 90$, то $\cos\angle MKC_1 = \frac{\sqrt{70}}{35}$

$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{4}{70} = \frac{66}{70}$ => $\sin a = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{70}} = \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{1155}}{35}$

$S_{MKC_1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36+4} \cdot \sqrt{36 \cdot 3 + 144} \cdot \frac{\sqrt{1155}}{35} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{7} \cdot \sqrt{33 \cdot 35}}{35} = \frac{6 \cdot 35\sqrt{66}}{35} =$

$= 6\sqrt{66}$

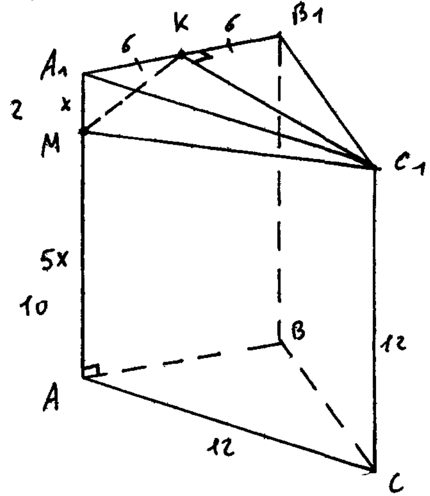
Ответ: $6\sqrt{66}$

Пункт а) решён верно с помощью метода координат и уравнения плоскости. В пункте б) неверно определены координаты вектора и из-за этого ответ неверен.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 12)

№14



а) 1) Пусть $C_1 \in \alpha$, тогда $C_1K \in \alpha$ (т.к. $K \in \alpha$)

2) $ABCA_1B_1C_1$ – прав. треуг. призм. $\Rightarrow \triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ – р/ст,

$A_1K = KB_1 \Rightarrow C_1K$ – мед. и выс. $\triangle A_1B_1C_1$, $(AA_1B) \perp (A_1B_1C_1)$,

$C_1K \in (A_1B_1C_1) \Rightarrow C_1K \perp (AA_1B)$, $C_1K \in \alpha$, $\alpha \cap (AA_1B) \Rightarrow \alpha$

$\Rightarrow \alpha \perp (AA_1B)$ (призн. $\perp$ пл-тей) $\Rightarrow C_1 \in \alpha$. чтд

б) $S_{\triangle C_1MK}$ – ?

1) $AA_1 = x + 5x = 6x = 12 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow AM = 10, A_1M = 2$

2) $C_1K \perp (AA_1B)$, $MK \in (AA_1B) \Rightarrow C_1K \perp MK \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle C_1MK$ – прям. $\Rightarrow S_{\triangle C_1MK} = \frac{1}{2} \cdot C_1K \cdot MK$

3) $\triangle A_1B_1C_1$ – р/ст, C_1K – выс. $\Rightarrow C_1K = A_1C_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1C_1 = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1K = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

4) AA_1B_1B – квадрат, т.к. все стороны $= 12 \Rightarrow \triangle KA_1M$ – прям.

5) $A_1K = KB_1$, $A_1B_1 = 12 \Rightarrow A_1K = KB_1 = 6$

6) $\triangle KA_1M$ – прям., $A_1M = 2$, $A_1K = 6 \Rightarrow$ по т. Пиф.:

$MK = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

7) $S_{\triangle C_1MK} = \frac{1}{2} \cdot C_1K \cdot MK$, $C_1K = 6\sqrt{3}$, $MK = 2\sqrt{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle C_1MK} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \cancel{2}\sqrt{10} = 6\sqrt{30}$ (ед)^2

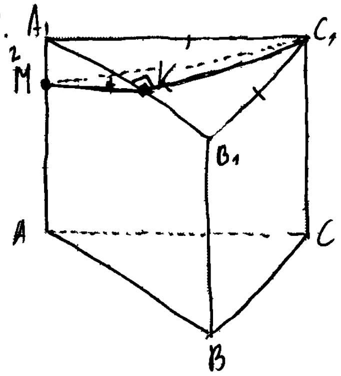
Ответ: б) $6\sqrt{30}$

Первая часть не доказана. Вторая решена с использованием части а).

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 13)

14.



а. 1) $\triangle A_1C_1B_1$ – равносторонний, т.к. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма. Проведём C_1K. C_1K – медиана ($A_1K = KB_1$), высота, биссектриса. $\Rightarrow \angle C_1KA_1 = 90^\circ$

2) $C_1K \perp$ грани ABB_1A_1 ($A_1B_1 \perp C_1K$)

3) плоскость α $\perp$ грани ABB_1A_1 (по условию)

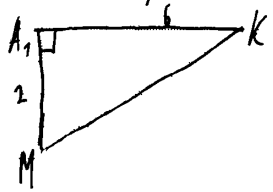
4) $\begin{cases} C_1K \perp ABB_1A_1 \\ \alpha \perp ABB_1A_1 \end{cases} \Rightarrow C_1K_1 \in \alpha \Rightarrow C_1 \in \alpha$

ч.т.д.

б. 1) $AM = 5MA_1 \Rightarrow AA_1 = AM + MA_1 = 6MA_1$; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = AC_1 = 12$ (по условию)

$\Rightarrow 6MA_1 = 12 \Rightarrow MA_1 = 2$

2) Рассмотрим $\triangle MA_1K$:



$A_1B_1 = 12$ (по условию) $\Rightarrow A_1K = \frac{12}{2} = 6$ ($A_1K = B_1K$)

$\angle MA_1K = 90^\circ$ (AA_1B_1B – квадрат) $\Rightarrow$

$\Rightarrow MK = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

3) сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α – $\triangle C_1MK$

~~4) Рассмотрим $\triangle A_1KC$ и $\triangle MKC_1$:~~
~~C_1K – общая сторона~~

4) $C_1K = \sqrt{A_1C_1 - A_1K_1} = \sqrt{144-36} = \sqrt{108} = 2\sqrt{27}$

5) Рассмотрим $\triangle MKC_1$: $\angle C_1KM = 90^\circ$ ($C_1K \perp AA_1B_1B$; $MK \in AA_1B_1B$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle MKC_1} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{27} = 6\sqrt{30}$

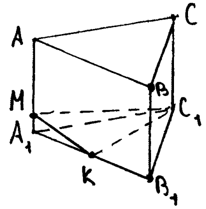
Ответ: $6\sqrt{30}$

Первая часть решена неверно (вывод о перпендикулярности прямой и плоскости делается по перпендикулярности этой прямой к одной прямой в плоскости). Часть б) решена с использованием части а)

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 14)

14



Дано:

Все рёбра – равны 20

$ABCA_1B_1C_1$ – правильн. треуг. призма $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ бок. сторон перпендик. основанием.

$AM = 4A_1M$; $A_1K = KB_1$

плоск. $\alpha \perp ABB_1A_1$

Доказать: плоск α проходит через точ. C_1

Найти: $S_{сеч}$ плоск. α.

а) Доказат-во:

т.к точки M и K лежат на ~~плоск~~ ребрах AA_1 и A_1B_1, значит отр. MK принадлеж. плоск. ABB_1A_1

$A_1K = KB_1 \Rightarrow$ точка K лежит на середине A_1B_1, ~~при этом~~ раз основан. – правильн. треуг, следовательно в $\Delta A_1B_1C_1$, при проведении высоты с точ. C_1, она будет опираться на середину A_1B_1 – точку K, создавая отрезок KC_1 (высоту), который будет перпендикулярен ~~плоск~~ ABB_1A, потому что основ. $\Delta A_1B_1C_1 \perp ABB_1A_1$.

Так как плоск α проходит через MK и перпендикулярна ABB_1A_1. — плоск будет включать в себя отрезок KC_1, а значит и точку C_1, образовывая ΔMKC_1

б) Решение:

1) $A_1K = KB_1 \Rightarrow KB_1 = \frac{1}{2}A_1B_1 = \frac{20}{2} = 10$

рассм Δ ~~MK~~ KB_1C_1

$\left.\begin{array}{l} B_1C_1 = 20 \text{ (по услов)} \\ KB_1 = 10 \\ KC_1 \perp KB_1 \end{array}\right\} \Rightarrow KC_1 = \sqrt{B_1C_1^2 - KB_1^2} = \sqrt{400-100} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ (по теор. Пифагора)

2) $\left.\begin{array}{l} A_1A = 20 \\ A_1M = \frac{MA}{4} \end{array}\right\} A_1M = \frac{1}{5}AA_1 = \frac{20}{5} = 4$ (можно подел. на 5 частей)

Рассм ΔA_1KM:

$\left.\begin{array}{l} A_1K = KB_1 = 10 \\ A_1M = 4 \\ MA_1 \perp A_1K \end{array}\right\} MK = \sqrt{4^2+10^2} = \sqrt{116} = \sqrt{29 \cdot 4} = 4\sqrt{29}$ (теор Пифагора)

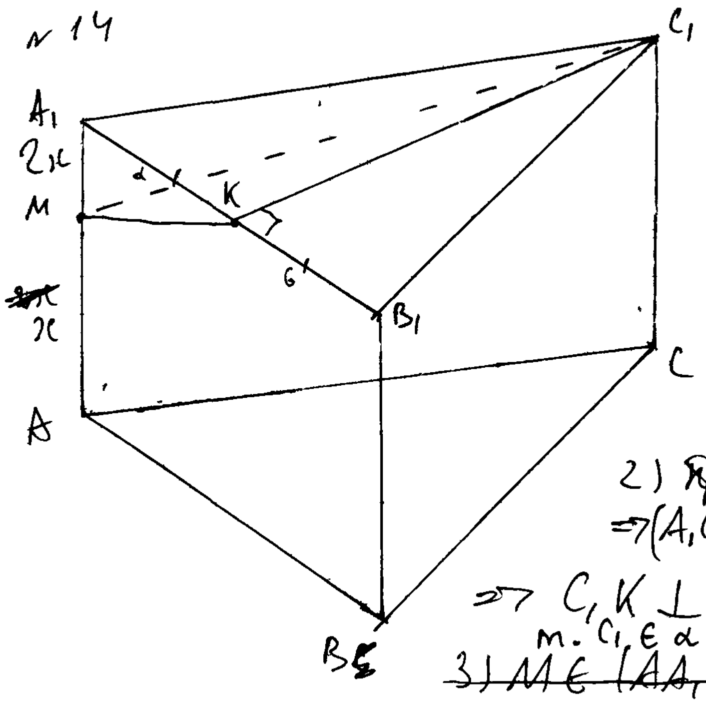
3) $\left.\begin{array}{l} MK \perp KC_1 \\ KC_1 = 10\sqrt{3} \\ MK = 4\sqrt{29} \end{array}\right\} S_{\Delta MKC_1} = \frac{1}{2} MK \cdot KC_1 = 10 \cdot 4\sqrt{3 \cdot 29} = 40\sqrt{87}$

Ответ: $40\sqrt{87}$

Первая часть решена. Во второй части есть 2 вычислительные ошибки.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 15)



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прав. треуг. призма; $A_1M = 2MA$, $A_1K = KB_1$

а) Док-ать: $\alpha \cap C_1$

б) ~~$S_{ABCA_1B_1C_1} = ?$~~. $S_\alpha = ?$;

~~$AC = 12$~~ все ребра = 12

Док-во: 1) ~~проведём~~ $\triangle A_1C_1B_1$ – р/с (призма правильная) => C_1K – высота, мед., биссектр.

2) Призма правильная => ~~C_1K~~ => $(A_1C_1B_1) \perp (AA_1B_1)$ ~~=> $C_1K \perp AA_1$~~ =>

=> $C_1K \perp (AA_1B_1)$ => $C_1K \in \alpha$, а значит и т. $C_1 \in \alpha$ ч.т.д.

~~3) $M \in (AA_1B_1)$, $K \in (AA_1B_1)$ => можно соединить~~

~~MK~~ б) 1) Пусть $AM = x$, тогда $MA_1 = 2x$ ($A_1M = 2MA$) => $x + 2x = 12$ =>

=> $x = 4$ => $A_1M = 4 \cdot 2 = 8$

2) $\triangle KA_1M$ – прямоуг.; $A_1K = \frac{1}{2} A_1B_1 = 6$, $A_1M = 8$ => по т. Пифагора:

$MK^2 = MA_1^2 + A_1K^2$ => $MK^2 = \sqrt{64 + 36}$ => $MK = 10$

3) $\triangle MA_1C_1$ – прямоуг.; $MA_1 = 8$; $A_1C_1 = 12$ => по т. Пифагора: $MA_1^2 + A_1C_1^2 = MC_1^2$ =>

=> $\sqrt{64 + 144} = MC_1$ => $MC_1 = \sqrt{208}$

4) $\triangle C_1KB_1$ - прямоуг.; $KB_1=6$; $C_1B_1=12$ $\Rightarrow$ по т. Пифагора:

$C_1B_1^2 - KB_1^2 = C_1K^2 \Rightarrow C_1K = \sqrt{108}$

5) по т. косинусов для $\triangle MKC_1$: $KC_1^2 = MK^2 + MC_1^2 - 2MK\cdot MC_1\cdot\cos\angle KMC_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 108 = 100 + 208 - 2\cdot 10\cdot\sqrt{208}\cdot\cos\angle KMC_1 \Rightarrow \cos\angle KMC_1 = \frac{10}{\sqrt{208}}$

6) по осн. тригоном. тождеству: $\sin^2\angle KMC_1 = 1 - \cos^2\angle KMC_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2\angle KMC_1 = 1 - \frac{100}{208} = \frac{108}{208} \Rightarrow \sin\angle KMC_1 = \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{208}}$

7) $S_{\triangle KMC_1}$ (площадь иск. сеч. α) $= \frac{1}{2}\cdot MK\cdot MC_1\cdot \sin\angle KMC_1 \Rightarrow$

$= S_{\triangle KMC_1} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\sqrt{208}\cdot\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{208}} = 5\sqrt{108}$

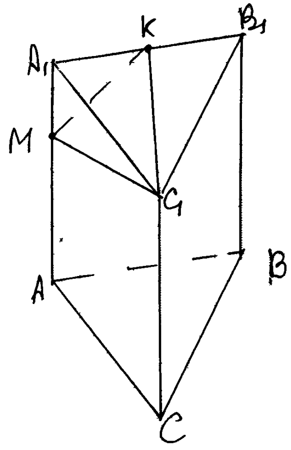
Ответ: ~~5~~ б) $5\sqrt{108}$

Полное решение с использованием теоремы косинусов. Ответ не упрощён.

Оценка эксперта: 3 балла.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 16)

N 14



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прав. 3-уг. пр.
$M \in AA_1$ $K \in A_1B_1$
$A_1M = 2MA$ $A_1K = KB_1$
$M \in \alpha$ $\alpha \perp A_1BB_1A_1$
$K \in \alpha$

а) Доказать: $C_1 \in \alpha$

Док-ва: 1) $A_1K = KB_1 \Rightarrow C_1K$ – медиана, но $\triangle A_1B_1C_1$ – прав ($ABCA_1B_1C_1$ – прав. пр) $\Rightarrow$
C_1K – медиана, выс, бис.
$C_1K \perp A_1B_1$

2) $AA_1 \perp (A_1C_1B_1)$, т.к $ABCA_1B_1C_1$ – прав. пр $\Rightarrow$
$AA_1 \perp C_1K$. $C_1K \perp A_1B_1$ и $C_1K \perp AA_1 \Rightarrow$
$C_1K \perp AA_1B_1B$; $K \in \alpha \Rightarrow C_1K \in \alpha$; $C_1 \in \alpha$ ч.т.д.

б) ребра $= 12$
Найти: $S_{сеч. \alpha}$ – ?
Решение: 1) (C_1KM) – иск. сеч
$AA_1 \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow A_1K$ – проекция MK на $(A_1B_1C_1)$
$C_1K \perp A_1B_1$; $A_1K \perp C_1K \Rightarrow$ по т. о 3 перп. $MK \perp C_1K$;
MKC_1 – пр/уг. $\triangle$.
2) $A_1M = 2MA \Rightarrow A_1M = \frac{2}{3}AA_1 = 8$
$A_1K = KB_1 = 6$. по т. Пиф. ($AA_1 \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow AA_1 \perp A_1K$)
$MK = \sqrt{MA_1^2 + A_1K^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$
~~$C_1K =$~~ т.к $\triangle A_1B_1C_1$ – прав (п. а)), то $\angle KA_1C_1 = 60°$. $\sin 60° = \frac{KC_1}{A_1C_1} = \frac{KC_1}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$KC_1 = 6\sqrt{3}$. $S_{MKC_1} = \frac{1}{2} \cdot KC_1 \cdot MK = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{3}{\cancel{6}}\sqrt{3} \cdot 10 = 30\sqrt{3}$.

Ответ: б) $30\sqrt{3}$.

Полное решение.

Оценка эксперта: 3 балла.

Задание № 15.

Решите неравенство

$$\frac{2^{3x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+2} - 16}{x-1} \geq 0.$$

Решение

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{(2^x - 2)(2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8)}{x-1} \geq 0; \ \frac{(2^x - 2)^2(2^x - 4)}{x-1} \geq 0.$$

Значение числителя $(2^x - 2)^2(2^x - 4)$ равно нулю при $x = 1$ и $x = 2$, положительно при $x > 2$ и отрицательно при $x < 1$ и $1 < x < 2$. Таким образом, значение дроби равно 0 при $x = 2$ и положительно при $x < 1$ и $x > 2$. Решение исходного неравенства $x < 1$ и $x \geq 2$.

Ответ: $(-\infty; 1)$; $[2; +\infty)$.

Типичные ошибки

1) Неверная расстановка знаков при применении метода интервалов.
2) Отбрасывание знаменателя без учета его знака.
3) Ошибки в разложении многочлена на множители.
4) Вычислительные ошибки.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 17)

15) $\dfrac{2^{3x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+2} - 16}{x-1} \geq 0$

$x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$\dfrac{2^{3x} - 2 \cdot 2^{2x+2} + 5 \cdot 2^{x} \cdot 2^{2} - 16}{x-1} \geq 0$

$\frac{2^{3x}-2\cdot 2^{2x}\cdot 2^{2}+5\cdot 2^{x}\cdot 4-16}{x-1}\geq 0$ $\qquad 2^{x}=t \qquad t>0$

$\frac{t^{3}-8t^{2}+5t\cdot 4-16}{x-1}\geq 0$

$\frac{t^{3}-8t^{2}+20t-16}{x-1}\geq 0$

прировняю к нулю

$\frac{t^{3}-8t^{2}+20t-16}{x-1}=0$

~~Выра жение ровно когда~~

~~произведение~~

дробь $=0$, когда числитель $=0$, а знаменатель $\neq 0$

$\Downarrow$

$t^{3}-8t^{2}+20t-16=0$

$\cancel{t^{3}-16}$

$t^{2}(t-8)+2(10t-8)=0$

$(t-8)(t^{2}+2)(10t-8)=0$

$t=8 \qquad t^{2}+2 \qquad 10t=8$

$\cancel{2^{x}=3} \qquad t^{2}=-2$ решений нет $\qquad t=\frac{8}{10}$

$x=3 \qquad x=\log_2\frac{8}{10}$

$x\in[\log_2 0{,}8 : 1)\cup[3:+\infty)$

В решении корни числителя найдены неверно, причём это не вычислительные ошибки. Решение неравенства неверно.
Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 18)

№ 15

$$\frac{2^{3x}-2\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+2}-16}{x-1}\geqslant 0 \qquad ОДЗ: \cancel{x-1\neq 0}\ \ x-1\neq 0,\ x\neq 1$$

$$\frac{(2^x)^3-8\cdot(2^x)^2+20\cdot 2^x-16}{x-1}\geqslant 0$$

Замена: $2^x=t,\ t>0$

$$\frac{t^3-8\cdot t^2+20t-16}{x-1}\geqslant 0$$

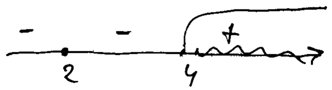
Рассмотрим числитель отдельно:
$t=2$ является корнем, воспользуемся схемой горнера:

	1	−8	20	−16
2	1	−6	8	0

значит: $\frac{(t-2)(t^2-6t+8)}{x-1}\geqslant 0$

$$\frac{(t-2)^2(t-4)}{x-1}\geqslant 0 \quad \Big|\cdot(x-1)\neq 0$$

$$(t-2)^2(t-4)\geqslant 0$$



$t\in\{2\}\cup[4;+\infty)$

Вернёмся к замене:

$$\left[\begin{array}{l}2^x=2\\ 2^x\geqslant 4\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=2^1\\ 2^x\geqslant 2^2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1 \text{ не уд ОДЗ}\\ x\geqslant 2 \text{ (ф-ия } y=2^x \text{ монотонно возрастает, знак не меняется)}\end{array}\right.$$

Ответ: ~~x ≥ 2~~ $x\in[2;+\infty)$

В решении исследован только числитель. Поэтому решение неравенства неверно.
Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 19)

Задание 15

$$\frac{2^{3x}-2\cdot4^{x+1}+5\cdot2^{x+2}-16}{x-1}\ge 0$$

ОДЗ:
$x-1\ne0$
$x\ne1$

$$\frac{2^{3x}-8\cdot2^{2x}+20\cdot2^{x}-16}{x-1}\ge 0$$

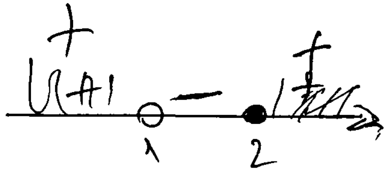
преобразую числитель:

15 $2^{3x}-4\cdot2^{2x}-4\cdot2^{2x}+16\cdot2^{x}+4\cdot2^{x}-16=2^{2x}(2^x-4)-4\cdot2^x(2^x-4)+4(2^x-4)=(2^{2x}-4\cdot2^x+4)(2^x-4)=(2^x-4)^3$

$$\frac{(2^x-4)^3}{x-1}\ge 0$$

найду нули числ.:
$(2^x-4)^3=0$
$2^x-4=0$
$2^x=4$
$x=2$

~~нули знам.:~~
$\cancel{x-1\ne0}$
$\cancel{x\ne1}$



Ответ
$x\in(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$

В решении неверно преобразован числитель. Ошибка не вычислительная. Несмотря на это ответ верен.
Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 20)

№15

$$\frac{2^{3x}-2\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+2}-16}{x-1}\geqslant 0 \Rightarrow \frac{2^{3x}-2\cdot 2^{2x}\cdot 4+5\cdot 2^{x}\cdot 2^{2}-16}{x-1}\geqslant 0$$

ограничения

$x\neq 1$

$$\frac{2^{3x}-2^{2x}\cdot 8+2^{x}\cdot 20-16}{x-1}\geqslant 0 \Rightarrow \frac{t^{3}-t^{2}\cdot 8+t\cdot 20-16}{x-1}\geqslant 0 \Rightarrow$$

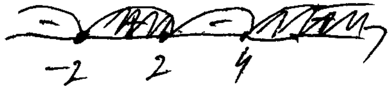
замена

$t=2^{x}$

$(t+2)(t^{2}-6t+8)\geqslant 0 \Rightarrow (t+2)(t-2)(t-4)\geqslant 0$

Обратная замена

$$\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=2 \\ t=4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2^{x}\leqslant 2^{1} \Rightarrow 2^{x}\leqslant 2^{1} \Rightarrow x\leqslant 1\ (x\neq 1 \text{ из огран.}) \Rightarrow x<1 \\ 2^{x}\geqslant 4 \Rightarrow 2^{x}\geqslant 2^{2} \Rightarrow x\geqslant 2 \end{array}\right.$$



Ответ: $x\in(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$

В решении неверно найдены корни числителя. Понять, вычислительная это ошибка или нет не представляется возможным, эта часть решения отсутствует. Не объяснён выбор промежутков. Поэтому решение оценивается в 0 баллов.
Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 21)

15. $\dfrac{2^{3x}-2\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+2}-16}{x-1}\geq 0$

$\dfrac{2^{3x}-2\cdot 4\cdot 4^{x}+5\cdot 4\cdot 2^{x}-16}{x-1}\geq 0$

пусть $2^x=t$:

$\dfrac{t^3-8t^2+20t-16}{x-1}\geq 0$

по т. Безу:

$f(t)=t^3-8t^2+20-16.$

$t=2$ является корнем

$f(t)=(t-2)(t^2-6t+8)$

схема Горнера:

	1	-8	20	-16
2	1	-6	8	0

$\dfrac{(t-2)(t^2-6t+8)}{x-1}\geq 0$

$\dfrac{(t-2)(t-4)(t-2)}{x-1}\geq 0$

обратная замена:

$\dfrac{(2^x-2^1)(2^x-2^2)(2^x-2^1)}{x-1}\geq 0$

Знак выражение $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает на ОДЗ со знаком выражении $(a-1)(f(x)-g(x))$, значит по методу рационализации:

$\dfrac{(2-1)(x-1)(2-1)(x-2)(2-1)(x-1)}{x-1}\geq 0.$ $\Big|:(2-1)^3 \rightarrow \dfrac{(x-1)^2(x-2)}{x-1}\geq 0$

по методу интервалов $\quad + \quad 1 \quad - \quad 2 \quad + \quad x$

Ответ: $x\in(-\infty;1)\cup[2;\infty)$

Верное решение с помощью метода рационализации. Числитель разложен на множители с помощью схемы Горнера.
Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 22)

N 15.

$$\frac{2^{3x}-2\cdot4^{x+1}+5\cdot2^{x+2}-16}{x-1}\geqslant0$$

ОДЗ: $x\neq1$

$$\frac{2^{3x}-2\cdot4\cdot2^{2x}+5\cdot4\cdot2^{x}-16}{x-1}\geqslant0$$

$$\frac{2^{3x}-8\cdot2^{2x}+20\cdot2^{x}-16}{x-1}\geqslant0$$

$$\frac{2^{3x}-2\cdot2^{2x}-6\cdot2^{2x}+12\cdot2^{x}+8\cdot2^{x}-16}{x-1}\geqslant0$$

$$\frac{2^{2x}(2^{x}-2)-6\cdot2^{x}(2^{x}-2)+8(2^{x}-2)}{x-1}\geqslant0$$

$$\frac{(2^{2x}-6\cdot2^{x}+8)(2^{x}-2)}{x-1}\geqslant0$$

$$\frac{(2^{2x}-4\cdot2^{x}-2\cdot2^{x}+8)(2^{x}-2)}{x-1}\geqslant0$$

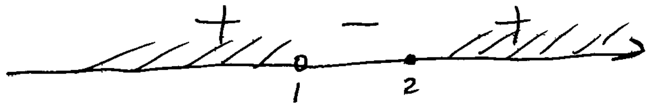
$$\frac{(2^{x}(2^{x}-4)-2(2^{x}-4))(2^{x}-2)}{x-1}\geqslant0$$

$$\frac{(2^{x}-2)^{2}(2^{x}-4)}{x-1}\geqslant0 \qquad \frac{(2^{x}-2^{1})(2^{x}-2^{1})(2^{x}-2^{2})}{x-1}\geqslant0$$

по мет. рац. $(2>1)$ $\qquad \frac{(x-1)^{2}(x-2)}{x-1}\geqslant0$

Н.Ч. $x=1$ $x=2$

Н.З $x=1$



$x\in(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$

В решении используется разложение на множители с помощью группировки и применён метод рационализации.
Оценка эксперта: 2 балла.

Задание № 16.
15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн. рублей на 72 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– к 15 декабря 2032 года кредит должен быть полностью погашен.
Чему равна общая сумма платежей в 2027 году?

Решение
По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться на 18000 : 72 = 250 тыс. рублей, следовательно, по состоянию на 15 декабря 2026 года и на 15-е число каждого месяца 2027 года долг (в тыс. рублей) должен уменьшаться до 15000 тыс. рублей следующим образом: 18000; 17750; 17500; …; 15500; 15250; 15000. Первого числа каждого месяца 2027 года долг возрастает на 1%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова: 1,01 · 18000 = 18180; 1,01 · 17750 = 17927,5; 1,01 · 17500 = 17675; …; 1,01 · 15500 = 15655; 1,01 · 15250 = 15402,5. Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими: 250 + 180 = 430; 250 + 177,5 = 427,5; …; 250 + 155 = 405; 250 + 152,5 = 402,5. Всего следует выплатить в 2027 году

$$12 \cdot \frac{430 + 402{,}5}{2} = 4995 \text{ тыс. рублей.}$$

Ответ: 4995 тыс. рублей.

Типичные ошибки

1) Ошибки в математической модели.

В математической модели вычисляли выплаты за 6 лет или не за тот год.

2) Вычислительные ошибки.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 23)

16. Пусть 18 млн = 72S

	сумма	сумма с %	выпл.	ост.
1.	$72S$	$72S+72S\cdot0{,}01$	$72S\cdot0{,}01+S$	$71S$
2.	$71S$	$71S+71S\cdot0{,}01$	$71S\cdot0{,}01+S$	$70S$
…	…	…	…	…
13.	$60S$	$60S+60S\cdot0{,}01$	$60S\cdot0{,}01+S$	$59S$
…	…	…	…	…
24.	$49S$	$49S+49S\cdot0{,}01$	$49S\cdot0{,}01+S$	$48S$
…	…	…	…	…
72.	S	$S+S\cdot0{,}01$	$S\cdot0{,}01+S$	0

Общая сумма выплат за ~~27~~ 2027 год равна общей сумме выплат с 13 по 24 месяцы. Тогда:

1) $\frac{60S\cdot0{,}01+S+49S\cdot0{,}01+S}{2}\cdot12=12S\left(\frac{1{,}6+1{,}49}{2}\right)=12S\cdot1{,}545=$

$=18{,}54S$

2) $72S=18 \Rightarrow S=\frac{18}{72}=\frac{1}{4}$

3) $18{,}54\cdot\frac{1}{4}=4{,}635$

Ответ: 4,635 млн руб.

Неверная математическая модель – вместо суммы выплат от 1 месяца до 12 посчитана сумма выплат от 13 месяца до 24.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 24)

16) $S = 18$ млн. рублей $\quad r\% = 1\%$

$n = 72$ месяца

	Долг до %	после %	платёж	Долг после платежа
1	S	$S + 0{,}01S$	$0{,}01S + \frac{S}{72}$	$S - \frac{S}{72}$
2	$S - \frac{S}{72}$	$(S - \frac{S}{72}) + 0{,}01(S - \frac{S}{72})$	$0{,}01(S - \frac{S}{72}) + \frac{S}{72}$	$S - \frac{2S}{72}$
3	$S - \frac{2S}{72}$	$(S - \frac{2S}{72}) + 0{,}01(S - \frac{2S}{72})$	$0{,}01(S - \frac{2S}{72}) + \frac{S}{72}$	$S - \frac{3S}{72}$
…	…	…	…	…
71	$S - \frac{70S}{72}$	$(S - \frac{70S}{72}) + 0{,}01(S - \frac{70S}{72})$	$0{,}01(S - \frac{70S}{72}) + \frac{S}{72}$	$S - \frac{71S}{72}$
72	$S - \frac{71S}{72}$	$(S - \frac{71S}{72}) + 0{,}01(S - \frac{71S}{72})$	$0{,}01(S - \frac{71S}{72}) + \frac{S}{72}$	0

Т.к. ~~[illegible]~~ долг уменьшается равномерно, то платежи образуют арифметическую прогрессию.

Воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{72} = \frac{a_1 + a_{72}}{2} \cdot 72 = \frac{0{,}01S + \frac{S}{72} + 0{,}01(S - \frac{71S}{72}) + \frac{S}{72}}{2} \cdot 72$$

$$S_{72} = \frac{0{,}01 \cdot 18 + \frac{18}{72} + 0{,}01(18 - \frac{71 \cdot 18}{72}) + \frac{18}{72}}{2} \cdot 72 =$$

~~$S_{72} = (0{,}18 + \frac{1}{4} + 0{,}0025 + \frac{1}{4}) \cdot 36 = 0{,}8575 \cdot 36 = 30{,}87$~~

~~Ответ: 30870000 рублей~~

$S_{72} = (0{,}18 + \frac{1}{4} + 0{,}0025 + \frac{1}{4}) \cdot 36 = 0{,}6825 \cdot 36 = 24{,}57$

Ответ: 24570000 рублей

Неверная математическая модель – вместо суммы выплат от 1 месяца до 12 посчитана сумма выплат от 1 месяца до 72.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 25)

№16

S - сумма долга, S = 18 млн

· 1,01 - начисление процентов

$\frac{S}{72} + 1{,}01 - 1 \cdot \frac{72-n}{72} \cdot S$ – выплата ежемесячная

n] - номер месяца

составим мат. модель по условию задачи:

1) $18 \cdot 1{,}01 - \frac{18}{72} + 0{,}01 \cdot \frac{71 \cdot 18}{72} = 17{,}75$

2) $17{,}75 \cdot 1{,}01 - \frac{18}{72} + 0{,}01 \cdot \frac{70 \cdot 18}{72} = 17{,}5$

...

12) $15{,}25 \cdot 1{,}01 - \frac{18}{72} + 0{,}01 \cdot \frac{60 \cdot 18}{72} = 15$

заметим, что выплата с каждым месяцем уменьшается на $\frac{18}{72} \cdot 0{,}01$ тогда воспользуемся арифм. прогрессией чтобы найти сумму выплат

Сумма выплат $= \frac{0{,}43 + 0{,}4025}{2} \cdot 12 = 4{,}995$ млн

Ответ: 4,995 млн

В записи модели есть ошибки, хотя посчитана сумма выплат правильно.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 26)

№16 Пусть 7 число - день платежа.

Дата		Сумма долга
15 д. 2026		18
1м.	1	$18 \cdot 1{,}01 = 18{,}18$
	7 я	$\Rightarrow$ была выплата $18{,}18 - 17{,}75 = 0{,}43$
	15	$\frac{71}{72} \cdot 18 = 17{,}75$
2м.	1	$17{,}75 \cdot 1{,}01 = 17{,}9275$
	7 ф	$\Rightarrow$ б. в. $17{,}9275 - 17{,}5 = 0{,}4275$
	15	$\frac{70}{72} \cdot 18 = 17{,}5$
3м.	1	
	7 м.	$\Rightarrow$ б. в. $0{,}425$
	15	$17{,}25$
...		
71м.	15 ч.	$0{,}25$
72м.	1	$0{,}2525$
	7 ч.	$\Rightarrow$ б. в. $0{,}2525$
	15	0

Выплаты обр. арифм. прогр. Воспольз. формулой:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Т. к. к 2027 г. пройдет ровно 12 месяцев $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Общ. сумма вып. $=$

$$= \frac{0{,}43 + 0{,}4025}{2} \cdot 12 = 4{,}995 \text{ млн. руб}$$

Ответ: 4 995 000 рублей.

Верное решение.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 27)

№16

Дано

$r=1\%$

$k=\frac{r}{100}=0{,}01$

$S=18$ млн

Общ. сум. выплат. ? (2027)

	долг	долг с %	выплата
1	S	$S+Sk$	$Sk+\frac{S}{72}$
2	$\frac{71}{72}S$	$\frac{71}{72}S+\frac{71}{72}Sk$	$\frac{71}{72}Sk+\frac{S}{72}$
3	$\frac{70}{72}S$	$\frac{70}{72}S+\frac{70}{72}Sk$	$\frac{70}{72}Sk+\frac{S}{72}$
⋮			
12	$\frac{61S}{72}$	$\frac{61S}{72}+\frac{61}{72}Sk$	$\frac{61}{72}Sk+\frac{S}{72}$

$$\frac{12}{72}S+\frac{Sk+\frac{61}{72}Sk}{2}\cdot 12$$ – сумма выплат в 2027

$$\frac{12\cdot 18}{72}+k6\cdot 18+\frac{61\cdot 18}{12}k=3+108k+91{,}5k=$$

$$=3+199{,}5\cdot 0{,}01=4{,}995 \text{ млн.}$$

Ответ: 4,995 млн.

Верное решение.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 28)

16) $S = 18$млн - сумма кредита ; $K = 1{,}01$ - коэффициент увеличение долга.

$n = 72$ месяца - продолжительность кредита

Составим таблицу платежей за 27ой год.

месяц	долг млн	выплата млн	остаток млн
январь	KS	X_1	$S-0{,}25$
февраль	$KS-0{,}25K$	X_2	$S-0{,}5$
март	$KS-0{,}5K$	X_3	$S-0{,}75$
апрель	$KS-0{,}75K$	X_4	$S-1$
май	$KS-K$	X_5	$S-1{,}25$
июнь	$KS-1{,}25K$	X_6	$S-1{,}5$
июль	$KS-1{,}5K$	X_7	$S-1{,}75$
август	$KS-1{,}75K$	X_8	$S-2$
сентябрь	$KS-2K$	X_9	$S-2{,}25$
октябрь	$KS-2{,}25K$	X_{10}	$S-2{,}5$
ноябрь	$KS-2{,}5K$	X_{11}	$S-2{,}75$
декабрь	$KS-2{,}75K$	X_{11}	$S-3$

Т.к. долг кредит взят на 72 месяца, то ежемесячно он уменьшается на: $\frac{18}{72} = 0{,}25$млн

сумма платежей за 27ой год образуют арифметическую прогрессию:

$$X_1 + X_2 .. + X_{12} = \frac{(KS + KS - 2{,}75K)}{2} \cdot 12 - \frac{(S - 0{,}25 + S - 3)}{2} \cdot 12$$

$$= 6(2KS - 2{,}75K - 2S + 3{,}25) = 6(1{,}01 \cdot 36 -$$

$$- 2{,}75 \cdot 1{,}01 - 36 + 3{,}25) = 6(0{,}36 + 3{,}25 - 2{,}7775)$$

$$= 6(0{,}36 + 0{,}4725) = 6 \cdot 0{,}8325 =$$

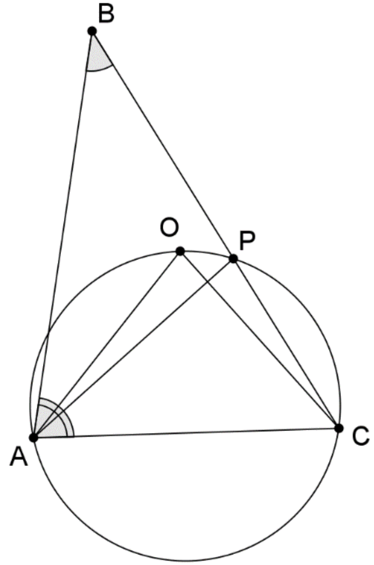
$4{,}995$млн.

Ответ $4{,}995$млн.

Верное решение.
Оценка эксперта: 2 балла.

Задание № 17.

В остроугольном треугольнике ABC угол BAC в два раза больше угла ABC. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AOC, пересекает отрезок BC в точках C и P.
а) Докажите, что треугольники PAC и ABC подобны.
б) Найдите длину стороны AB, если $AC = 2$, $BC = \sqrt{10}$.



Решение
а) В окружности, описанной около треугольника ABC, вписанный угол ABC и центральный угол AOC опираются на одну дугу. Следовательно, $\angle AOC = 2\angle ABC$.
Около четырёхугольника $AOPC$ можно описать окружность, значит, $\angle APC = \angle AOC = 2\angle ABC$.
Таким образом, в треугольниках PAC и ABC угол ACB – общий, а углы APC и BAC равны, поскольку они равны удвоенному углу ABC. Следовательно, треугольники PAC и ABC подобны.
б) Из подобия треугольников PAC и ABC получаем:

$$PC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{4}{\sqrt{10}} = 0{,}4\sqrt{10}.$$

Значит, $BP = BC - PC = 0{,}6\sqrt{10}$. В подобных треугольниках PAC и ABC углы PAC и ABC равны. Значит, угол BAC в два раза больше угла PAC. Таким образом, AP – биссектриса угла BAC. По свойству биссектрисы треугольника $AB : AC = BP : PC = 3 : 2$, откуда получаем

$$AB = \frac{3}{2}AC = 3.$$

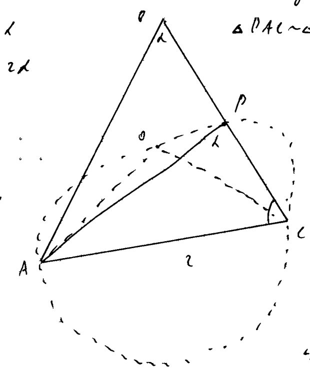
Ответ: б) 3.

Типичные ошибки

1) Неверные свойства вписанных углов.
2) Отождествление дуг разных окружностей.
3) Ошибки в использовании теорем косинусов и синусов.
4) Вычислительные ошибки.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 29)

17)
$\angle ABC = \alpha$
$\angle BAC = 2\alpha$



а) т.д. O - центр окружн. описан. около $\triangle ABC$.
$\triangle PAC \sim \triangle ABC$ $\angle ABC = \alpha$ $\angle BAC = 2\alpha$

т.к. около $\triangle ABC$ описана окружн.
$\angle ABC$ - вписан. $= \alpha$ (опир. на $\smile AC$)
$\Rightarrow \smile AC = 2\alpha$ ($\smile AC$ без B)
около $\triangle AOC$ - описана окр.
~~ОЦ~~ P лежит на окружности.
$\angle APC$ - вписан. и опирается на $\smile AC$
$\angle APC = \frac{\smile AC}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

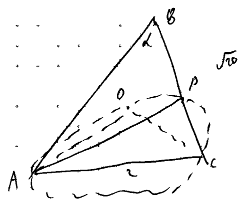
~~$\angle ABC$ 2вн~~

т.к. $\angle ABC$ - впис. и опирается на $\smile AC$ и $\angle APC$ - впис. и опирается на $\smile AC$

$\angle ABC = \angle APC = \alpha$, $\angle ACB$ - общий для $\triangle ABC$ и $\triangle PAC$
$\triangle ABC \sim \triangle APC$ (по 2 углам: $\angle ABC = \angle APC$; $\angle ACB$ - общий)

ч. т. д.

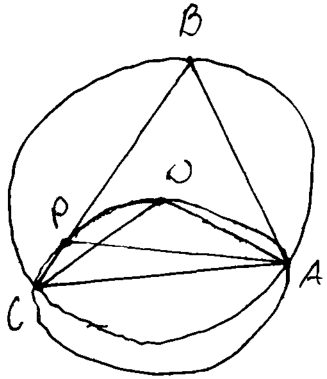
б) AB - ? $AC = 2$ $BC = \sqrt{10}$



В решении отождествляются дуги разных окружностей. Пункт б) не решён.
Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 30)

№17



$\angle BAC = 2\alpha$ $\quad$ $\angle CPA = \angle COA = \angle COA \cdot 2 =$

$\angle ABC = \alpha$ $\quad$ $= 2\alpha$ тогда.

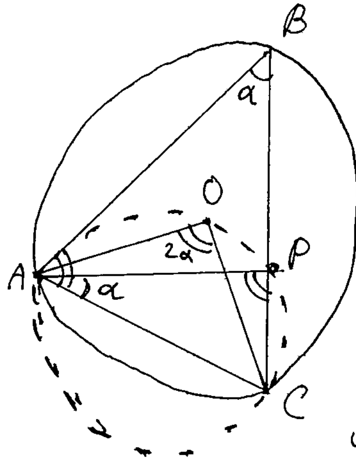
$\triangle ABC \sim \triangle CPA$.

$\angle C$ - общий, $\angle CPA = \angle BAC$, значит треугольники подобны по 2 углам ч.т.д.

Решена часть а). К части б) выпускник не приступал.
Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 31)

17.



а) Пусть $\angle ABC = \alpha$; $\angle BAC = 2\alpha$

$\angle BCA = 180^\circ - 3\alpha$

$\angle AOC = 2\alpha$, как центральный, опирающийся на дугу AC ($\cup AC = 2\alpha$, т.к. впис $\angle ABC = \alpha$)

$\angle AOC = \angle APC$, как впис, опирающиеся на одну дугу

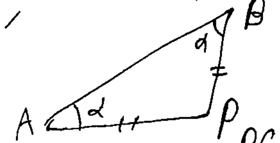
$\triangle PAC \sim \triangle ABC$ по 2 углам ($\angle C$ – общий, $\angle BAC = \angle APC$), чтд.

б). из п. а $\to \angle PAC = \alpha$, $AC = 4$, $BC = 6$.

из подобия $\triangle PAC \sim \triangle ABC$: $\frac{PC}{AC} = \frac{AC}{BC} \to PC = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$.

$BP = BC - PC = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$.

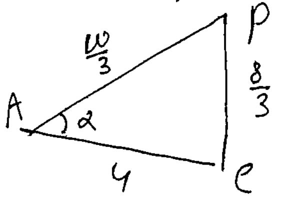
Рассмотрим $\triangle ABP$:



$\angle BAP = 2\alpha - \alpha = \alpha \to \triangle ABP$ – р/б $\to BP = AP$

$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2\cdot AP\cdot AC\cdot\cos\alpha$.

Рассмотрим $\triangle APC$:

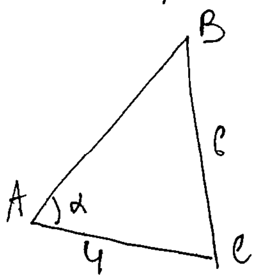


по т. косинусов: $\left(\frac{8}{3}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 4^2 - 2\cdot\frac{10}{3}\cdot 4\cdot\cos\alpha$.

$-\frac{80}{3}\cos\alpha = \frac{64}{9} - \frac{100}{9} - 16 = -\frac{36}{9} - \frac{144}{9} = -\frac{180}{9} = -20$

$\cos\alpha = \frac{20\cdot 3}{80} = \frac{3}{4}$

Рассмотрим $\triangle ABC$:



по т. косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos\alpha$

$36 = AB^2 + 16 - 2\cdot AB\cdot 4\cdot\frac{3}{4} \to AB^2 - 6AB - 20 = 0$, $D = 36 + 20\cdot 4 = 116$. $\sqrt{D} = 2\sqrt{29}$.

т.к $AB > 0$, то $AB = \frac{6 + 2\sqrt{29}}{2} = 3 + \sqrt{29}$.

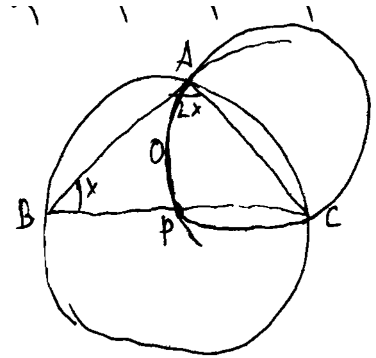
Ответ: $3 + \sqrt{29}$.

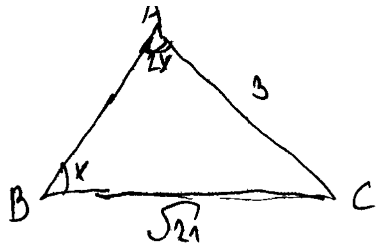
Решен правильно пункт а). В пункте б) угол BAC равен α вместо 2α, что дало неверный результат.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 32)

17. б)





$\triangle ABC$: по т. синусов $\frac{\sqrt{21}}{\sin 2x} = \frac{3}{\sin x}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sin 2x = \sqrt{21}\sin x$

$6\sin x\cos x - \sqrt{21}\sin x = 0$

$\sin x(6\cos x - \sqrt{21}) = 0$

$\sin x = 0$

$x = \pi k$ 50; 180

что невозможно для треугольника

$\cos x = \sqrt{\frac{21}{36}} = \sqrt{\frac{7}{12}}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{2}{12}$

по Т Косинусов в $\triangle ABC$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{AB;BC}$

$3 = AB^2 + 21 - 2\sqrt{21} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} \cdot BC$

$AB^2 - 7AB + 12 = 0$

$D = 49 - 48 = 1$

$AB_1 = \frac{7+1}{2} = 4$

$AB_2 = \frac{7-1}{2} = 3$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{AB;BC}$

$21 = AB^2 + 9 - 2\frac{AB \cdot 3 \cdot 2}{12}$

$AB^2 - AB - 12 = 0$

$D = 1 - (-12 \cdot 4) = 49$

$AB_1 = \frac{1+7}{2} = 4$

$AB_2 = \frac{1-7}{2} = -3$

общий корень двух уравнений является 4, это и есть сторона AB

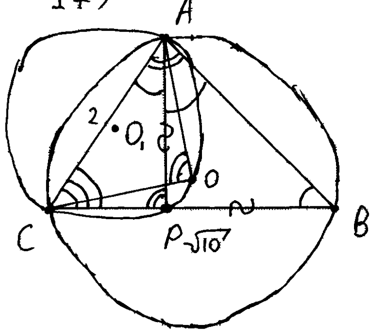
Ответ: б) 4

Пункт б) решён по теореме синусов и косинусов без применения пункта а). Пункт а) не решён.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 33)

17)



Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный

$\angle BAC = 2\cdot\angle ABC$

$(O;R)$ – окр опис около $\triangle ABC$

O – центр опис вокруг $\triangle ABC$ окружности

$(O_1;r)$ – окр опис около $\triangle ACO$

$(O_1;r)$ пересекает BC в точках C и P

б) $AC = 2$ $BC = \sqrt{10}$

а) Доказать: $\triangle PAC \sim \triangle ABC$

б) Найти: AB

а) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle BAC = 2\alpha$

$\angle COA = 2\cdot\angle ABC = 2\alpha$ (центральный угол в 2 раза больше вписанного опирающегося на ту же дугу)

$\angle COA = \angle CPA = 2\alpha$ (вписанные углы опирающиеся на одну дугу равны) (окружность $(O_1;r)$)

Рассмотрим $\triangle PAC$ и $\triangle ABC$

$\left.\begin{array}{l}\angle ACP - \text{общий}\\ \angle CPA = \angle CAB\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PAC \sim \triangle ABC$ (по 2 углам)

(чтд)

б) $\triangle PAC \sim \triangle ABC \Rightarrow \angle CAP = \angle ABC = \alpha \Rightarrow AP$ - биссектриса $\angle CAB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PAB = \angle PBA = \alpha \Rightarrow \triangle PBA$ – равнобедренный (углы при основании равны)

$\triangle PBA$ – р/б $\Rightarrow AP = PB$

Пусть $AP = x$, тогда $PB = x$

$\triangle PAC \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AP}{AB} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{x}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{\sqrt{10}\,x}{2}$

По св-ву биссектрисы для $\triangle ACB$ и биссектрисы AP: $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{10}-x}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2}{AB} = \dfrac{\sqrt{10}-x}{x} \Rightarrow AB = \dfrac{2x}{\sqrt{10}-x}$

$$AB = \frac{\sqrt{10}\,x}{2}, \quad AB = \frac{2x}{\sqrt{10}-x} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}\,x}{2} = \frac{2x}{\sqrt{10}-x} \Rightarrow 4x = 10x - \sqrt{10}\,x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{10}\,x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\,x\left(\sqrt{5}\,x - 3\sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 - \text{п.к.} \\ x = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{10}\cdot 3\cdot\sqrt{10}}{2\cdot 5} \Rightarrow AB = 3$$

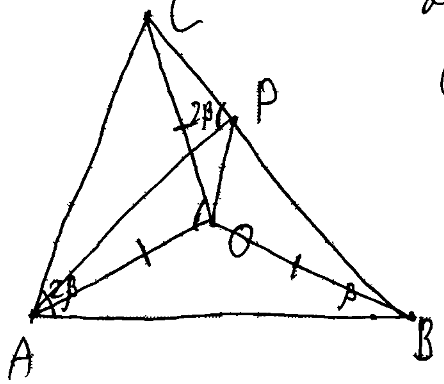
Ответ: $AB = 3$.

Полное решение. Использовано свойство биссектрисы треугольника.

Оценка эксперта: 3 балла.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 34)

№ 17



Дано: $\triangle ABC$; $\angle BAC = 2\angle ABC$

O - центр ω, опис. около $\triangle ABC$

ω' - окруж. около AOC; $\omega' \cap BC = C; P$

а) Док.: $\triangle PAC \sim \triangle ABC$

б) AB - ?, если $AC = 2$; $BC = \sqrt{10}$

Решение: 1) $AO = OB = OC \Rightarrow \triangle AOC$, $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$ - равнобедренные

$\Rightarrow \angle OCB = \angle OBC$; $\angle OAB = \angle ABO \Rightarrow \angle OCB + \angle OAB = \angle OBC + \angle ABO = \angle ABC$.

2) Пусть $\angle ABC = \beta \Rightarrow \angle OCB + \angle OAB = \beta$

$\angle OAC + \angle OCA = (\angle BAC - \angle BAO) + (\angle ACB - \angle OCB) = \angle CAB + \angle ACB - \beta$

т.к. $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180 \Rightarrow \angle BAC + \angle ACB = 180 - \angle ABC = 180 - \beta$

$\Rightarrow \angle OAC + \angle OCA = 180 - \beta - \beta = 180 - 2\beta$

3) $\angle AOC$ из $\triangle AOC$: $\angle AOC = 180 - \angle ACO - \angle OAC = 180 - (180 - 2\beta) = 2\beta$.

4) $AOPC$ – вписанный в ω' (окружность около $\triangle AOC$)

$\Rightarrow \angle AOC = \angle APC$, как опир. на дугу ($\smile AC$)

$\Rightarrow \angle APC = 2\beta$

5) $\angle CAB = 2 \cdot \angle ABC = 2 \cdot \beta = 2\beta$

6) $\angle CAB = 2\beta = \angle APC$; $\angle ACB = \angle ACP$ (общий)

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle APC$ ч.т.д.

б) 7) По т. синусов: (для $\triangle ABC$) $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = \dfrac{BC}{\sin\angle CAB} \Rightarrow \dfrac{2}{\sin\beta} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sin 2\beta}$

$\Rightarrow 2\sin 2\beta = \sqrt{10}\sin\beta \Rightarrow 4\sin\beta\cos\beta = \sqrt{10}\sin\beta$, т.к. $\beta \neq 0$, то $\sin\beta \neq 0 \Rightarrow$

$4\cos\beta = \sqrt{10} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$

8) По т. косинусов из $\triangle ABC$: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\angle BAC$

$\Rightarrow 10 = 4 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot 2 \cdot \cos 2\beta$

$6 = AB^2 - 4AB(2\cos^2\beta - 1) \Rightarrow 6 = AB^2 - 4AB \cdot \left(2 \cdot \frac{10}{16} - 1\right)$

$6 = AB^2 - 4 \cdot AB \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow AB^2 - AB - 6 = 0$

$(AB-3)(AB+2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AB = -2 \\ AB = 3 \end{array}\right. \Rightarrow AB = 3$ (AB не отриц.)

Ответ: 3

Полное решение через теоремы синусов и косинусов
Оценка эксперта: 3 балла.

Задание № 18.
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-25a+10=0$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.
Введём вспомогательную переменную $y=x+\frac{4}{x}$. Учитывая, что $x\neq 0$, запишем это равенство в виде $x^2 - yx + 4 = 0$. Дискриминант получившегося квадратного относительно x уравнения равен $y^2 - 16$ и $x = 0$ не является корнем этого уравнения ни при каком значении y. Таким образом, значениям $-4 < y < 4$ не соответствуют никакие значения x; каждому из значений $y = 4$ и $y = -4$ соответствует единственное значение x; каждому из значений $y < -4$ и $y > 4$ соответствуют ровно два различных значения x, причём каждое ненулевое значение x достигается для единственного значения y. Таким образом, количество корней исходного уравнения зависит от количества корней уравнения $ay^2 + 2y - 25a + 10 = 0$ и их расположения относительно чисел -4 и 4.
При $a = 0$ уравнение $ay^2 + 2y - 25a + 10 = 0$ принимает вид $2y + 10 = 0$, откуда $y = -5 < -4$. Значит, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.
При $a\neq 0$ рассмотрим квадратное уравнение $ay^2 + 2y - 25a + 10 = 0$. Запишем его в виде $(y + 5)(ay - 5a + 2) = 0$.
При $a=\frac{1}{5}$ уравнение имеет единственный корень $y = -5 < -4$, значит, $a=\frac{1}{5}$ удовлетворяет условию задачи.
При $a\neq 0$, $a\neq\frac{1}{5}$ уравнение имеет два различных корня: -5 и $5-\frac{2}{a}$. В этом случае для выполнения условия задачи должно выполняться двойное неравенство $-4<5-\frac{2}{a}<4$, откуда $\frac{2}{9} < a < 2$.
Таким образом, $a = 0$, $a=\frac{1}{5}$, $\frac{2}{9} < a < 2$.

Ответ: $a = 0$, $a = \frac{1}{5}$, $\frac{2}{9} < a < 2$.

Типичные ошибки

1) При замене переменной не вычисляются границы для новой переменной, что приводит к построению неверной модели.

2) Не рассматривается вырожденный случай превращения квадратичной функции в линейную.

3) Вычислительные ошибки.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 35)

18. $a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-25a+10=0$ ОДЗ: $x \neq 0$

при $a=0$:

$0\cdot\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2x+\frac{4}{x}-\overset{25\cdot 0}{\cancel{25a}}+10=0$

$2x+\frac{4}{x}+10=0 \mid \cdot x$

$2x^2+10x+4=0$ — квадратное уравнение — парабола

$D=\cancel{100-64}\ 100-36=64$

$64>0 \Rightarrow$ два корня, значит при $a=0$ — ровно два значения

Ответ: 0.

Задача не сведена к исследованию корней квадратного уравнения.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 36)

18. $t = x + \frac{4}{x}$. $x \neq 0$. $at^2 + 2t - 25a + 10 = 0$. $D_1 = 4 - 4 \cdot a \cdot (-25a + 10)$

$D_1 = 4 + 100a^2 + 40a$. При $D_1 < 0$ решений нет.

$100a^2 + 40a + 4 = 0$, $25a^2 + 10a + 1 = 0$. $\frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 25 \cdot 1}}{50} = -\frac{1}{5}$.

$\sqrt{100 - 4 \cdot 25 \cdot 1} = 0$, так что в $a = -\frac{1}{5}$, $D_1 = 0$, а в других местах $D_1 > 0$ (100 положительный коэфф.)

Чтобы получить ровно 2 решения, либо $D_1 = 0$, а $x + \frac{4}{x}$ удваивает кол-во решений,

либо $D_1 > 0$, а $x + \frac{4}{x}$ не удваивает. $t = x + \frac{4}{x}$ ~~$= b$, где b~~

$x^2 - tx + 4 = 0$. $D_2 = t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = t^2 - 16$. t не раздваивается при $t^2 = 16$, не имеет решений при $t^2 < 16$ (т.е. нам не подходит) и раздваивается при $t^2 > 16$.

Итого: $at^2 + 2t - 25a + 10 = 0$ 2 решения при $a \neq -\frac{1}{5}$, 1 реш при $a = -\frac{1}{5}$.

0 решений не бывает.

$x + \frac{4}{x} = t$ 2 решения при $|t| > 4$, 1 при $|t| = 4$, 0 при $|t| < 4$.

При $a = -\frac{1}{5}$, $at^2 - 2t - 25a + 10 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 10t - 75 = 0$, $t_1 = -15$, $t_2 = 5$.

При попытке свести решение к исследованию расположения корней допущена невычислительная ошибка, приведшая к неверной модели.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 37)

18. $a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-25a+10=0$ огр.: $x\neq 0$

$a\left(\frac{x^2+4}{x}\right)^2+2\left(\frac{x^2+4}{x}\right)-25a+10=0$

~~Пу~~ Пусть $\frac{x^2+4}{x}=t$

$at^2+2t-25a+10=0$

$D=0$, ~~один корень~~

$D=2^2-4\cdot a\cdot(-25a+10)=4+100a^2-40a=100a^2-40a+4=0$

$100a^2-40a+4=0$

$D=(-40)^2-4\cdot 100\cdot 4=1600-4\cdot 4\cdot 100=1600-1600=0$ $a=\frac{-b}{2a}$

$a=\frac{40}{2\cdot 100}=\frac{20}{100}=0{,}2$

Ответ: $\{0{,}2\}$.

Задача не сведена к исследованию корней квадратного уравнения, рассмотрен только случай нулевого дискриминанта.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 38)

№ 18

$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-9a+15=0$

Замена: $x+\frac{1}{x}=t$

При $a\neq 0$:

$at^2+5t-9a+15=0$

$u^2+5u-3a(3a-5)=0$

$\begin{cases} u_1+u_2=-5 \\ u_1\cdot u_2=-3a(3a-5) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-3a \\ u=3a-5 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=-\frac{3a}{a} \\ t_2=\frac{3a-5}{a} \end{array}\right. \\ \cancel{D>0} \end{cases}$

$D=25-4(a\cdot(-9a+15))=$

$=25+36a^2-60a$

$36a^2-60a+25>0$

$(6a-5)^2>0$

$6a-5\neq 0$

$6a\neq 5$

$a\neq\frac{5}{6}$

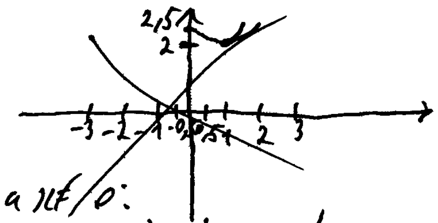
~~При $a=0$: не будет двух различных решений~~

~~При~~

Рассмотрим:

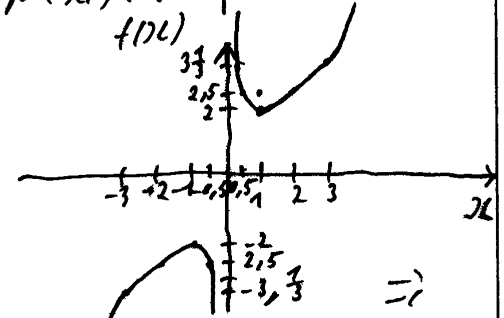
$f(x)=x+\frac{1}{x}$

$f(x)=\frac{x^2+1}{x}$



При $x\neq 0$:

$f(x)$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$f(x)$ имеет два различных корня при $f(x)\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$~~

$\Rightarrow x\neq 0$

~~$f(x)$ имеет~~ x имеет 2 различных корня, когда $f_1(x)=f_2(x)$, либо $f_1(x)$ – сущ., а $f_2(x)$ – нет и наоборот $f_2(x)$ – сущ., а $f_1(x)$ – нет.

Т. к. $t_1 = -3$ и находится в промежутке $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \Rightarrow$, что $t_1 = -3$ имеет всегда 2 решения $\Rightarrow$ t_2 должно либо существовать, либо совпадать с $t_1 = t_2 \Rightarrow$

I) $\Rightarrow t_2 = t_1 \Rightarrow -3 = \dfrac{3a-5}{a} \Rightarrow \underline{a = \dfrac{5}{6}}$ – 2 реш. для x.

II) При $\underline{a = 0:}$

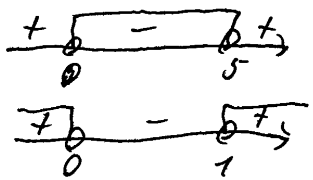
$5t + 15 = 0$

$t = -3$ – 2 решения для x.

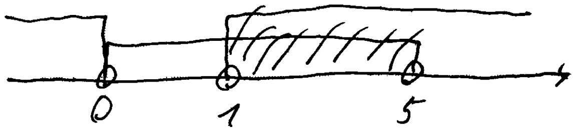
III) Когда $t_2 \in [-2; 2]$:

$$-2 < \frac{3a-5}{a} < 2$$

$$\begin{cases} \dfrac{3a-5}{a} < 2 \\ \dfrac{3a-5}{a} > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a-5}{a} < 0 \\ \dfrac{5(a-1)}{a} > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow$



$\underline{a \in (1; 5)}$ – 2 реш. для x.

Ответ: $\{0\} \cup \left\{\frac{5}{6}\right\} \cup (1; 5)$

Построение графика для замены не обосновано. Корни квадратного уравнения найдены неверно, а затем заменены на верные. Но тем не менее задача сведена к исследованию корней квадратного уравнения.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 39)

18. $a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-25a+10=0$, $x+\frac{4}{x}=b$,

$ab+2b-25a+10=0$

$D=4+4a(25a-10)=4+100a^2-40a=(2-10a)^2$, $\sqrt{D}=|2-10a|$

$$\left[\begin{array}{l} b=\dfrac{-2+|2-10a|}{2a} \\ b=\dfrac{-2-|2-10a|}{2a} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{lll} b = \dfrac{-2+2-10a}{2a}, & 2-10a \geq 0 & (1) \\ b = \dfrac{-2+10a-2}{2a}, & 2-10a < 0 & (2) \\ b = \dfrac{-2-2+10a}{2a}, & 2-10a \geq 0 & (3) \\ b = \dfrac{-2+2-10a}{2a}, & 2-10a < 0 & (4) \end{array}\right.$$

(1) и (4) – совпадают на $a \in R$
(2) и (3) – совпадают на $a \in R$ $\Big| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{-10a}{2a} = -5, \text{ при } a \neq 0 \\ b = \dfrac{-4+10a}{2a} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{x^2+4}{x} = -5, \ a \neq 0 & (5) \\ \dfrac{x^2+4x}{x} = \dfrac{-4+10a}{2a} = \dfrac{-2+5a}{a} & (6) \end{array}\right.$$

(5) $\dfrac{x^2+5x+4}{x} = 0, \ x \neq 0$

$x^2+5x+4=0$

$(x+1)(x+4)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-4 \end{array}\right\}$ есть при $a \neq 0$

(6) $\cancel{x^2+4 = x(10a-4)}$

$\dfrac{x^2+4}{x} = \dfrac{5a-2}{a}$

$\begin{cases} ax^2-(5a-2)x+4a=0 \\ ax \neq 0 \end{cases}$ (7)

т.к. уже есть 2 корня, то нужно, чтобы (6) – не имело или совпадало с (5)

(7) $ax^2-(5a-2)x+4a=0$

$D = (5a-2)^2 - 16a^2 = 25a^2 - 20a + 4 - 16a^2 =$

$= 9a^2 - 20a + 4$

(6) – не им. реш. при $a=0$ и $9a^2-20a+4<0$

$9a^2-20a+4<0$

$D = 400 - 9\cdot 4\cdot 4 = 256 = 16^2$

$a = \frac{20+16}{2\cdot 9} = \frac{36}{18} = 2$ корни совпадают при $x=-1$, $x=-4$

$a = \frac{20-16}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$x=-1$

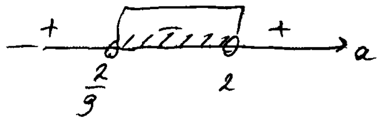
$a(-1)^2-(5a-2)\cdot(-1)+4a=0$

$a=\frac{1}{5}$

$x=-4$

$a(-4)^2-(5a-2)(-4)+4a=0$

$a=\frac{1}{8}$



при $a=0$: (подставлю $a=0$ в исходн. выражение)

$$0\cdot\left(\frac{x^2+4}{x}\right)^2+2\left(\frac{x^2+4}{x}\right)-25\cdot 0+10=0$$

$$\frac{2x^2+8}{x}+10=0$$

$$\begin{cases}2x^2+10x+8=0\\ x\neq 0\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2+5x+4=0\\ x\neq 0\end{cases}\qquad \begin{cases}(x+1)(x+4)=0\\ x\neq 0\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=-2\end{array}\right.$$ – 2 реш. $\Rightarrow$ $a=0$ – удовл. усл.

Ответ: $\{0\}\cup\left(\frac{2}{9};2\right)\cup\left\{\frac{1}{8};\frac{1}{5}\right\}$ среди них

В решении выполнены все шаги, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки при проверке случая совпадения корней.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 40)

18) $a\left(x+\frac{9}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{9}{x}\right)-49a+14=0$, $x+\frac{9}{x}=t$, пусть $a\neq 0$.

$at^2+2t-49a+14$

$D_t = 4-4a(14-49a) = 4-56a+49a^2\cdot 4 = 4(1-14a+49a^2) = 4(1-7a)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4(1-7a)^2}}{2a} = \frac{-2\pm 2(1-7a)}{2a} = \frac{-1\pm(1-7a)}{a}$

$t_1 = \frac{-1+1-7a}{a} \Rightarrow t_1=-7$ обратная замена;

$t_2 = \frac{-1-1+7a}{a} \Rightarrow t_2=\frac{7a-2}{a}$.

$\left[\begin{array}{l} x+\frac{9}{x}=-7 \quad (1) \\ x+\frac{9}{x}=\frac{7a-2}{a} \quad (2) \end{array}\right.$

(1): $\frac{x^2+7x+9}{x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-7+\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{-7-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

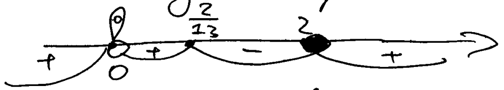
то есть уже из (1) ни имеем хотябы 2 корня,
значит (2) либо не имеет корней (т.е $D<0$)
либо корни (2) совпадают с корнями (1)
(это бывает только когда совпадают коэффициенты)

1) $D<0$, т.е: $\frac{x^2-\left(\frac{7a-2}{a}\right)x+9}{x}$ не имеет корней:

$\left(\frac{7a-2}{a}\right)^2-\underset{6^2}{4\cdot 9}<0 \Leftrightarrow \left(\frac{7a-2}{a}-6\right)\left(\frac{7a-2}{a}+6\right)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a-2}{a}\right)\left(\frac{13a-2}{a}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{(a-2)(13a-2)}{a^2}<0$

по методу интервалов



$\Leftrightarrow a\in\left[\frac{2}{13};2\right]$.

если корень совпал, то: $\frac{7a-2}{a}=-7 \Leftrightarrow a=\frac{1}{7}$

Пусть $a=0$, тогда, $2\left(x+\frac{9}{x}\right)+14=0 \Leftrightarrow x+\frac{9}{x}=-7$ получили
(1) уравнение $\Rightarrow a=0$ подходит.

18 Продолжение) Итого $a=0$; $a=\frac{1}{7}$; $a\in\left[\frac{2}{13};2\right]$.

$\frac{2}{13}>\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{1}{7}$ не входит в $a\in\left[\frac{2}{13};2\right]$

Ответ: $a\in\{0\}\cup\{\frac{1}{7}\}\cup\left[\frac{2}{13};2\right]$

С помощью верного рассуждения получены промежутки значений параметра, отличающиеся от искомого включением точек 2/13 и 2.

Оценка эксперта: 3 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 41)

18) $a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2 + 2\left(x+\frac{4}{x}\right) - 25a + 10 = 0$

ОДЗ: $x \neq 0$

$t = x + \frac{4}{x}$, проанализируем функцию $t = x + \frac{4}{x}$:

$t' = 1 - \frac{4}{x^2}$

$1 - \frac{4}{x^2} = 0$

$x \neq 0$ $+ \quad - \quad - \quad +$ t'

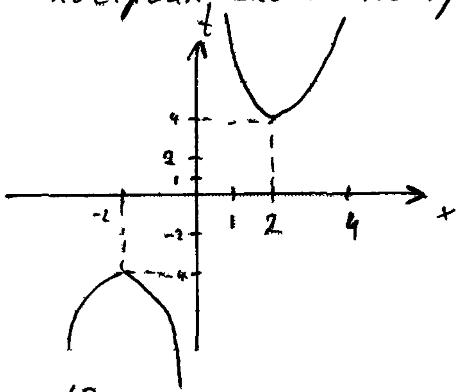
$x = \pm 2$ $-2 \quad 0 \quad 2$ t

$\nearrow \; \searrow \; \searrow \; \nearrow$

$t(-2) = -4$

$t(2) = 4$

Построим схематично график функции



Из графика можно сделать вывод, что 2 решения x будет иметь при двух корнях t $\left[\begin{array}{l} t_1 = -4 \\ t_2 = 4 \end{array}\right.$ или при 1 корне t $t \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

$at^2 + 2t - 25a + 10 = 0$

$\overset{0}{\cancel{y}} = a(t-5)(t+5) + 2(t+5)$

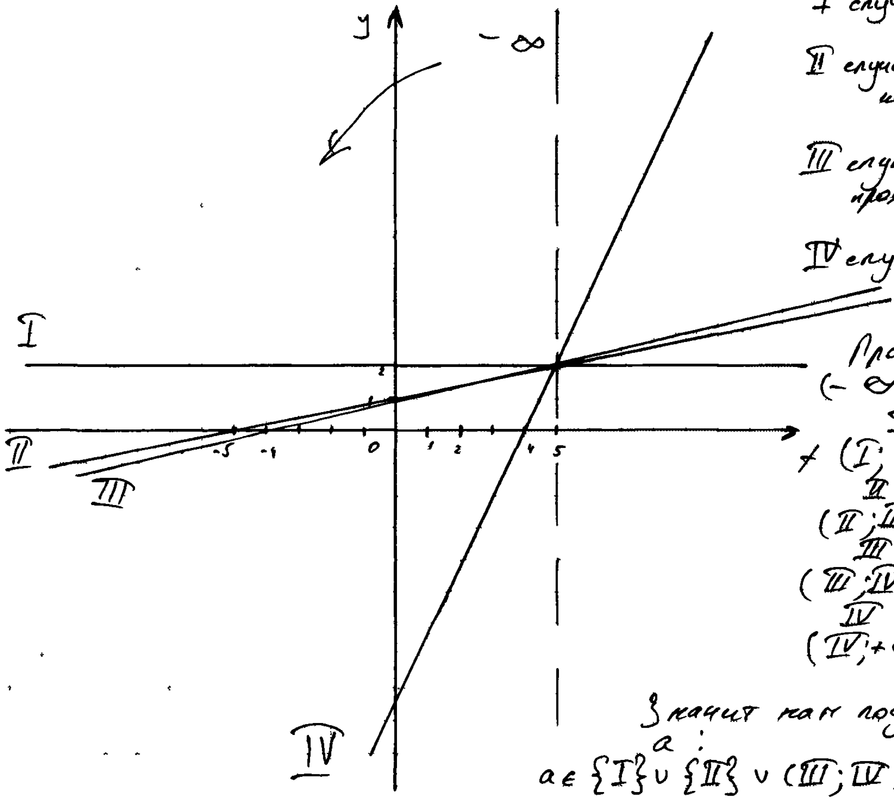
$0\,\cancel{y} = (t+5)(a(t-5)+2) \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} t+5=0 \\ a(t-5)+2 = 0 \end{array}\right.$, зададим функцию y

$\left[\begin{array}{ll} y = t+5 & \text{— прямая пересекает ось } Ot \text{ в точке } (-5;0) \\ y = a(t-5)+2 & \text{— пучок прямых в } (5;2) \end{array}\right.$

Так как нужно получить либо 1 корень $t \in (-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$, либо 2 корня $\left[\begin{array}{l} t_1=-4\\ t_2=4\end{array}\right.$, а у нас есть корень $t=-5$, то

график $y=a(t-5)+2$ либо должен проходить через точку $(-5;0)$ и иметь корень $t=-5$, либо должен не иметь корней, либо должен пересекать ось Ot в промежутке $t\in(-4;4)$

Построим графики в осях tOY.



I случай $y=a(t-5)+2$ параллелен оси Ot

II случай $y=a(t-5)+2$ проходит через точку $(-5;0)$

III случай $y=a(t-5)+2$ проходит через точку $(-4;0)$

IV случай $y=a(t-5)+2$ проходит через точку $(4;0)$

Промежуток a	корни
$(-\infty; I)$	1 корень
I	0 корней
$(I; II)$	1 корень
II	$t=-5$
$(II; III)$	1 корень
III	$t=-4$
$(III; IV)$	$t\in(-4;4)$
IV	$t=4$
$(IV; +\infty)$	1 корень

Значит нам подходят промежутки где a:

$a\in\{I\}\cup\{II\}\cup(III;IV)$

Найдем a во всех случаях

I $a=0$

II $0=-10a+2$ $a=0{,}2$

III $0=-9a+2$ $a=\frac{2}{9}$

IV $0=-a+2$ $a=2$

Ответ: $a \in \{0\} \cup \{0{,}2\} \cup \left(\frac{2}{9};2\right)$

Полное решение

Оценка эксперта: 4 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 42)

18) $a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-25a+10=0$ 2 реш.

$t=x+\frac{4}{x} \quad \Big|\cdot x \quad x\neq 0$

$x^2-tx+4=0.$ При $D<0$ $(t\in(-4;4))$: корней нет.

$D=t^2-16$ $\quad D=0$ $(t=\pm 4)$: 1 реш $=\frac{t}{2}=\pm 2$

$D>0$ $(t\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty))$: 2 реш:

$x_1=\frac{t+\sqrt{t^2-16}}{2} \qquad x_2=\frac{t-\sqrt{t^2-16}}{2}.$

Подставим t:

$a\cdot t^2+2t-25a+10=0.$

При $a=0$ уравнение не будет квадратным, подставим $a=0$:

$2t+10=0. \qquad t=-5.$

$-5=x+\frac{4}{x} \quad \Big|\cdot x\ ;\ x\neq 0.$

$x^2+5x+4=0.$

$D=25-16=9 \qquad x_1=\frac{-5+3}{2}=-1 \qquad x_2=-4.$

$\Rightarrow$ при $a=0$ будет 2 решения (подходит).

при $a\neq 0$:

$at^2+2t-(25a-10)=0.$

$D=4+4(25a-10)=4+100a^2-40a=(10a-2)^2.$

$D=0$: $a=\frac{2}{10}$ $\quad t=\frac{-2\cdot 10}{2\cdot 2}=-5$; $x_1=-1$; $x_2=-4$ подходит.

~~D≥0~~ $D<0$: $a \in \varnothing$

$D>0$: $a \in R \setminus \{\frac{2}{10}\}$.

$$t_1 = \frac{-2-|10a+2|}{2a} \qquad t_2 = \frac{-2+|10a+2|}{2a}.$$

$$t_1 = -5 \qquad t_2 = \frac{5a-2}{a}.$$

$t_1 = -5 \Rightarrow$ при любом a уравнение будет иметь не менее ~~более~~ 2 корня.

$\Rightarrow$ найдем значения a, при которых $t_2 \in (-4;4)$ и не будет иметь решений ~~[illegible]~~

$$\begin{cases} \frac{5a-2}{a} > -4 \\ \frac{5a-2}{a} < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5a-2 < 4a \\ 5a-2 > -4a \end{cases} \qquad \begin{cases} a<2 \\ a>\frac{2}{9} \end{cases}$$

~~Ответ: $a \in [\frac{2}{9}; 2] \cup \{\frac{2}{10}; 0\}$~~

При $a=2$; $a=\frac{2}{9}$ $t_2 = \pm 4 \Rightarrow$ уравнение будет иметь три корня, что не подходит под условие задачи

Ответ: $a \in (\frac{2}{9}; 2) \cup \{\frac{2}{10}; 0\}$

Полное решение
Оценка эксперта: 4 балла.

Задание № 19.
На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 20, меньше, чем чисел, делящихся на 23.
а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?
б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20?
в) Найдите наибольшее возможное значение k.

Решение.
а) Рассмотрим последовательные натуральные числа от 23 до 92 включительно. Среди них три числа (40; 60; 80) делятся на 20 и четыре числа (23; 46; 69; 92) делятся на 23.
б) Заметим, что среди каждых n подряд идущих чисел ровно одно делится на n. Значит, среди mn подряд идущих чисел ровно m делится на n. Таким образом, если среди записанных ровно десять чисел делится на 20, то чисел больше 180 и меньше 220. При этом если записанных чисел не больше 230, то среди них не больше десяти делится на 23, а значит, чисел, делящихся на 23, не больше, чем чисел, делящихся на 20. Таким образом, для десяти чисел, делящихся на 20, условие задачи не может быть выполнено.
в) Предположим, среди чисел, записанных на доске, m чисел делится на 20. Тогда $20(m-1)+1 \le k \le 20(m+1)-1$. Чисел, делящихся на 23, не меньше $m+1$. Следовательно, $k \ge 23m+1$. Таким образом:

$$23m+1 \le k \le 20(m+1)-1;$$

$$23m+1 \le 20(m+1)-1;\ 3m \le 18,\ m \le 6.$$

Следовательно, $k \le 20(m+1)-1 \le 139$. Покажем, что k может равняться 139. Рассмотрим 139 последовательных чисел 161; 162; …; 299. Среди них шесть чисел (180; 200; 220; 240; 260;280) делятся на 20 и семь чисел (161; 184; 207; 230; 253; 276; 299) делятся на 23.
Таким образом, наибольшее возможное значение k равно 139.

Ответ: а) да; б) нет; в) 139.

Типичные ошибки

1) Необоснованные утверждения.
2) В пункте а) отсутствие примера (только описание, из которого нельзя однозначно понять его вид).
3) При решении перебором – потеря случаев (неполный перебор).
4) При решении пункта в) есть только пример и отсутствует оценка и наоборот.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 43)

№ 19

а) 115 230 345 460 475 690 805 920

935 1050 1065 1280

460 : 20 = 23 920 : 20 = 46 1280 : 20 = 69

Ответ: да

Неверное понимание условия.
Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 44)

№ 19

а) Нет, так как если взять ряд 20 – 60, чисел, делящихся на 20 будет три, однако их будет больше, чем чисел, ~~делящихся~~ делящихся на 23, что противоречит условию задачи.

Приведён только один пример, противоречащий условию задачи. Даже если бы ответ был верный, этого было бы недостаточно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 45)

№19

~~а)~~ Начнем с 21 числа, тогда 21, 22, 23... 40... 46... 60...

69... 80... ~~89~~ 92. 23; 46; 69; 92 ~~XX~~ делятся на 23.

40 60 80 делятся на 20, а) да

Продолжая ряд

Ответ; а) да, б) нет в) 119

Верно решён первый пункт. В остальных пунктах – только ответы, причем в пункте в) он неверен.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 46)

19)

а) Да, например числа с 23 включая 23 до 92 включая 92

В этом промежутке 3 числа делятся на 20, это 40, 60 и 80

и 4 числа делящихся на 23, это 23, 46, 69, и 92

б) Нет, так как если у нас 10 чисел делятся на 20 то k:

$k \in [20\cdot10; 20\cdot10+19+19] \Rightarrow k \in [200; 238]$

При максимально возможном $k = 238$ у нас есть всего 10

чисел делящихся на 23 $\left(238 : \cancel{20}^{23} = 10 \text{ (ост.8)}\right)$

в) Если взять числа $\vdots$ 20 крайними в промежутке и ним может

прибавить/отнять по 19 в начале и конце промежутка, таким образом можно

получить больше чисел $\vdots$ 23, без уменьшения количества чисел $\vdots$ 20

Составим ур-е: $\frac{k}{23} \geq \frac{k}{20} - 1$

$20k \geq 23k - 460$

$3k \leq 460$

$k \leq 153\frac{1}{3}$ n - число делящееся на 23, а также $(n+19) \vdots 20$

$(n + (k-38)) \vdots 20 = 6 \Rightarrow$ Можно получить только 6 чисел $\vdots 20$ (или меньше)

Приведу пример : промежуток чисел $[\overset{n}{161}; \overset{n+138}{299}]$

в нем ровно 7 чисел $\vdots 23$, и 6 чисел $\vdots 20$

$\vdots 23$ 161 184 207 230 253 276 299

$\vdots 20$ 180 200 220 240 260 280

$299 - 161 = 138$

Ответ: а) Да б) Нет в) 138

Верно решён пункт а). В пункте б) границы числа k определены при условии, что числа начинаются с 1. В пункте в) неравенство (названное уравнением) не объяснено, количество чисел посчитано неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 47)

19. а) Да, $23 \ldots 40 \ldots 46 \ldots 60 \ldots 69 \ldots 80 \ldots 92$. ($a \cdot 23$ = сокращение " число делящееся на

б) Игнорируя числа не делящиеся на 20 и 23; ~~Начальная серия~~

Запишем числа в общем виде, начнём серию с числа кратного 23. Чтобы чисел, делящихся на 23 было больше, чем чисел делящихся на 20, они обязаны чередоваться: $20 > \frac{1}{2} \cdot 23$, поэтому между двумя числами кратными 23 не может быть двух или более, делящихся на 20. Серия чисел тогда должна начинаться, заканчиваться на число делящееся на 23, т.к. из-за чередования после каждого $a \cdot 23$ будет стоять $b \cdot 20$. Серия выглядит как $23n$, $20m$, $23(n+1) = 20(n+1) + 3(n+1) < 20(m+1)$, $20(m+1)$, $20(n+2) + 3(n+2) < 20(m+2)$ … . Если между двумя числами $a \cdot 23$ будет стоять больше одного $b \cdot 20$, то чисел $b \cdot 20$ будет столько-же или больше чем $a \cdot 23$. Чем дальше идет серия, тем больше отличается число делящееся на 23 от предыдущего числа делящегося на 20. Минимальна такая разница когда число делится и на 23, и на 20. Далее, эта разница увеличивается на 3, Если серия длится достаточно долго, чтобы нам встретилось десять $b \cdot 20$, эта разница станет больше 20, значит нам встретится два $b \cdot 20$ числа подряд. значит Ответ: нет,

в) Разница между $a \cdot 23$ и предыдущим $b \cdot 20$ должна быть < 20. Значит в $20(n+x) + 3(n+x) < 20(m+1)$ x должен быть $< \frac{20}{3}$, т.е. макс. $x = 6$.

X показывает насколько $a \cdot 23$ отличается от $b \cdot 20$. ~~При x=0, число до~~

При разнице в 0, число делится и на 20, и на 23, т.е. не ~~меняет~~ влияет на то, каких чисел больше. За ним следует $b \cdot 20$, значит ситуация как если бы мы начали с числа делящегося на 20, не подходит. Начиная со следующего числа делящегося на 23, (у него $x=1$), считаем. (пишу число делящееся на 23 как a, а число делящееся на 20 как b)

a b a b a b a b a b a . Между первым и последним a (включительно)

$x=1$ $x=2$ $x=3$ $x=4$ $x=5$ $x=6$

будет $(6-1)\cdot 23 + 1$ чисел. Ответ: макс $K = 116$.

В задании верно решены пункты а) и б). В пункте в) неверная оценка, приведшая к неверному ответу.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 48)

19 а) да, например: 161, 162, ..., 229, 230

числа $\vdots 20$: $\{180; 200; 220\}$

числа $\vdots 23$: $\{161; 184; 207; 230\}$

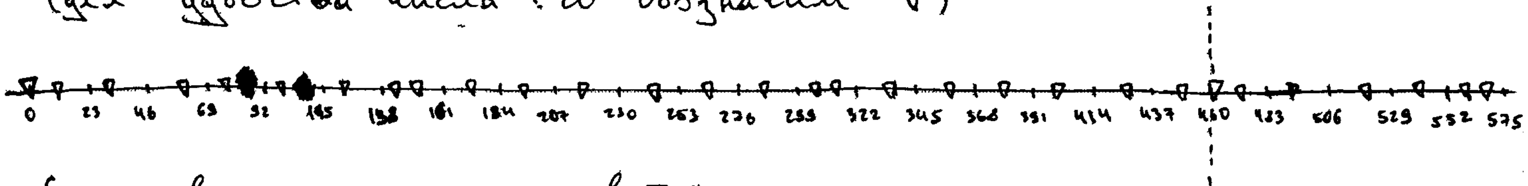
$3 < 4$

б) Расположение чисел ⋮ 20 и ⋮ 23 относительно друг друга повторяется каждые 460 посл. чисел, считая от 0

Рассмотрим это расположение: числа ⋮ 20: {0; 20; 40; 60; 80; 100; 120; 140; 160; 180; 200; 220; 240; 260; 280; 300; 320; 340; 360; 380; 400; 420; 440; 460}

числа ⋮ 23: {0; 23; 46; 69; 92; 115; 138; 161; 184; 207; 230; 253; 276; 299; 322; 345; 368; 391; 414; 437; 460}. Расположим их на прямой

(для удобства числа ⋮ 20 обозначим ▽)



Если в ряд посл. чисел войдёт промежуток, где между соседними числами ⋮ 23 есть два числа ⋮ 20, то общее количество чисел ⋮ 23 не будет больше общего кол-ва чисел ⋮ 20. То же самое с „границами" периода в 460 посл чисел, к-е кратны и 20, и 23.

Тогда период условно делится на 3 части по числам ⋮ 23, внутри которых „лежат" ряды чисел, подходящих условно (не учитывая числа ⋮ 20 и ⋮ 23):

① 23, 24, ..., ~~91, 92~~ 137, 138 ② ~~115, 116~~ 161, 162, ..., 298, 299 ③ 322, 323, ..., ~~459, 460~~ 436, 437

Ни в одном из этих рядов нет промежутка с 10 числами ⋮20

Значит, ~~20~~ 10 чисел ⋮20 быть не может

в) Из ряда располож. чисел ⋮20 и ⋮23 (пункт б) понятно, что макс.

чисел ⋮20 может быть ~~4~~6 (что соотв. 2й условной части периода)

Тогда ряд выглядит так: ~~125, 126~~ 161, 162, ..., 298, 299

Для достижения макс. количества всех чисел следует включить

по обеим сторонам этого ряда все возм. числа не кратные

20 или 23. Тогда ряд имеет вид: ~~121, 122~~ 161, 162, ..., 298, 299

Это ряд с наиб. количеством чисел, к-е равно 299 − 161 + 1 = ~~175~~ 139

Ответ: а) да б) нет в) ~~175~~ 139

Полное решение

Оценка эксперта: 4 балла.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 49)

№19

а) да, например $\overset{\vdots 23}{23}$, 24; ....; $\overset{\vdots 20}{40}$, .. $\overset{\vdots 23}{46}$; .... $\overset{\vdots 20}{60}$; ... $\overset{\vdots 23}{69}$.; $\overset{\vdots 20}{80}$, .. $\overset{\vdots 23}{92}$.

Делятся на 23: 23, 46; 69; 92 итого 4 числа

Делятся 20: 40; 60; 80 итого 3 числа

Ответ: да.

б) Пусть первое число, кратное 20 : 20n, тогда последнее 20n+180.
Чтобы ~~число~~ кол-во чисел, делящихся на 23 было максимальным, последовательность будет начинаться с 20n − 19 и оканчиваться 20n+199, тогда всего в последовательности $(20n+199)-(20n-19)+1=219$ чисел

Среди 219 последовательных натуральных чисел на 23 делятся $\frac{219}{23}=9\frac{12}{23}$ => максимум 9 чисел $9<10$ => такого быть не может

Ответ: нет

в) Пусть максимально возможное кол-во чисел, делящихся на 20 − p.
Тогда, для наибольшего кол-ва чисел, делящихся на 23 последовательность начинается с $20n-19$; где $20n$ − первое число в последовательности, ~~крат~~ которое кратно 20; а оканчивается последовательность ~~20p~~ $20n+20p-1$.
Всего чисел в последовательности $k=(20n+20p-1)-(20n-19)+1=20p+19$
Кол-во чисел, кратных 23 : $\frac{20p+19}{23}=\frac{20p}{23}+\frac{19}{23}$
По условию, кол-во чисел кратных 20 меньше => $p<\frac{20p}{23}+\frac{19}{23}$

$\frac{3p}{23}<\frac{19}{23}$

$3p<19$

$p<6\frac{1}{3}$, т.к. $p\in\mathbb{Z}$, то $p=6$. При $p=6$ $\underline{k=20\cdot 6+19=139}$

Например, подходит последовательность

161, 162, ..., 298, 299

Делятся на 20: 180, 200, 220, 240, 260, 280 : итого 6

Делятся на 23 : 161, 184, 207, 230, 253, 276, 299. итого 7

Ответ: 139

Полное решение. **Оценка эксперта:** 4 балла.

1.1.3. Анализ метапредметных результатов обучения, повлиявших на выполнение заданий КИМ

Сформированность метапредметных результатов обучения является необходимым условием успешной сдачи ЕГЭ по всем предметам, в том числе и математике. Низкая решаемость некоторых заданий, особенно базового уровня сложности, является индикатором того, что некоторые выпускники имеют дефицит метапредметных результатов обучения. Анализ типовых ошибок позволил нам сделать вывод о низком уровне сформированности следующих универсальных действий (УУД):

среди *познавательных УУД* это ряд базовых исследовательских действий, а именно:

- овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов;
- выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу её решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения;
- анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях;
- уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; уметь интегрировать знания из разных предметных областей;
- способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания.

среди *регулятивных УУД*:

- давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям.

Укажем типичные ошибки и задания КИМ, неуспешность выполнении которых обусловлена слабой сформированностью выделенных метапредметных умений.

Задание № 5. С данным заданием справилось ***47,24 %.***

Наиболее распространённый неверный ответ 0,93 (10,9%) – вероятность того, что кофе не закончится хотя бы в одном автомате. Второй по распространённости неверный ответ 0,53 (9,0%) – получается при вычитании из 1 вероятностей всех событий из условия.

Наиболее вероятными причинами неверного ответа является несформированность следующих умений:

- умения моделировать реальную ситуацию на языке теории вероятностей;
- умения осуществлять полный перебор вариантов событий;
- вычислительных умения.

Ошибки, допущенные при решении задачи, показывают, что выпускники, не справившиеся с решением данной задачи, не овладели следующими универсальными учебными действием:

способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях.

Задание № 11. С данным заданием справилось ***66,92%*** участников экзамена. Самый распространённый неправильный ответ 8 (5,5%) – складывается впечатление об угадывании ответа по графику, что указывает на неумение решать задачи на установление связей между аналитическим и графическим способом задания функциональной зависимости.

Наиболее вероятными причинами неверного ответа можно предполагать:

- несформированность умения анализировать визуальную информацию (график) в контексте поставленной задачи;
- несформированность умений представлять аналитический способ задания функциональной зависимости, представленной графическим способом;
- неверная интерпретация условия задачи;
- умение работать с моделью в контексте поставленной задачи;
- вычислительные ошибки.

Ошибки, допущенные при решении задачи, показывают, что выпускники, не справившиеся с решением данной задачи, не овладели следующим универсальным учебным действием:

способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов;

давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям.

В целом процент выполнения заданий второй части ЕГЭ (№14-4,54%, №15-10,97%, №16-13,1% %, №17-3,27%, №18-1,14%, №19-5,55%) говорит о том, что выпускники, не справившиеся с решением данных задач, не овладели следующими универсальными учебными действиями:

овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов;

выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу её решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения;

анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях;

уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; уметь интегрировать знания из разных предметных областей;

способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям.

Стоит отметить, что неожиданно низкий результат по задаче № 16 во многих ошибочных решениях обусловлен низким уровнем читательской грамотности. Причинами неверных ответов, у приступивших к решению данной задачи, чаще всего являлись ошибки в построении модели, в том числе не верно определенный период выплат.

В отчётах САО-11 по естественно-научным и гуманитарным дисциплинам отмечаются проблемы, сходные с теми, которые были нами выявлены при анализе результатов экзамена по математике. Приведём несколько примеров (фрагменты соответствующих отчётов).

- *формирование научного типа мышления, владение научной терминологией, ключевыми понятиями и методами*

  Низкий уровень сформированности этого метапредметного действия – системная проблема, которая обозначена в отчётах по всем дисциплинам в 2025 году.

  Химия. Причина затруднений решения задания № 4 кроется в недостаточной сформированности знаний в области такого понятия как типы химических связей и кристаллических решёток, непонимания зависимости свойств веществ от типа кристаллической решётки. Также причина затруднений решения данного задания кроется в недостаточной сформированности знаний в области классов неорганических веществ и их номенклатуры.

  География. Выпускники не знают особенностей стран, не ориентируются в географических картах (задание № 17).

  Литература. Слабое знание выпускниками программных произведений базового курса литературы: не могут подобрать ни одного контекста; совершают фактические ошибки в фамилиях авторов художественных произведений, именах героев, трактовке мотивов поступков, искажают авторскую позицию, идейное содержание.

- *уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; уметь интегрировать знания из разных предметных областей*

  Обществознание. Выпускники испытывали затруднения с выполнением заданий № 24-25, требующих умения приводить примеры-иллюстрации из истории и современных реалий, раскрывающие теоретические понятия и тезисы.

  Физика. В интегрированном задании №18 приводятся утверждения из разных разделов физики. По отдельности элементы усвоены, но выпускники не смогла дать полный ответ, включающий три верных утверждения. Причиной этого может быть недостаточный опыт выполнения интегрированных заданий.

  Английский язык. Невысокие результаты выпускников в разделе «Грамматика и лексика» (задания № 19-36) обусловлены слабой сформированностью метапредметных результатов в интеграции с владением языковыми средствами (способность выявлять закономерности в языковых явлениях английского языка; анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность).

География. В задании №25 выпускники довольно часто допускают ошибки математического характера, неверно округляя или сокращая числовые данные.

Информатика. Участники не используют или не могут применить знания, полученные на уроках математики, при решении задания № 8.

- *выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу её решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения*

Литература. Участники экзамена подменяют аналитическую работу с текстом эмоциональными описаниями событий произведения, черт характера того или иного персонажа.

История. Для выполнения задания № 18 мало знать факты, процессы, события явления, нужно уметь использовать принципы причинно-следственного, структурно-функционального, временно́го и пространственного анализа для изучения исторических процессов и явлений, а также ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства. 31,4% детей не приступили к выполнению этого задания.

- *давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям*

Информатика. На выполнение задания № 9 зачастую ученики тратят больше времени, чем рассчитывали, некоторые из-за этого начинают паниковать и записывают ответ, не удостоверившись в его правильности.

1.1.4. Выводы об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:

- *Перечень элементов содержания / умений и видов деятельности, усвоение которых всеми школьниками региона в целом можно считать достаточным*

На базовом уровне можно считать сформированными следующие элементы содержания / умения:

Числа и вычисления (Действия с действительными числами, корни, степени)

Уравнения и неравенства (Линейные, квадратные, дробно-рациональные уравнения)

Функции и графики (Степенная и показательная функции)
Геометрия. Планиметрия, стереометрия (базовый уровень)
Умение решать линейные, квадратные, дробно-рациональные уравнения
Умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами
Умение выполнять действия с функциями

- *Перечень элементов содержания / умений и видов деятельности, усвоение которых всеми школьниками региона в целом, школьниками с разным уровнем подготовки нельзя считать достаточным*

Числа и вычисления (Элементы тригонометрии)
Вероятность и статистика (Вероятность)
Начала математического анализа
Умение строить и исследовать простейшие математические модели
Умение выполнять действия с функциями

Элементы содержания и умения (по подгруппам)

- Для группы участников, не достигших минимального балла (7,2% от общего числа участников), нельзя выделить сформированные умения и элементы содержания.
- Для группы участников с результатами от минимального до 60 т. б. (41,8%), можно считать сформированными указанные умения и элементы содержания на базовом уровне, которые выделены для всех участников в целом.
- Для группы участников с результатами от минимального от 61 т. б. до 80 т. б. (43,1%), все основные элементы содержания и умения сформированы на базовом уровне.
- Для группы участников с результатами от минимального от 81 т. б. до 100 т. б. (7,9%), все основные элементы содержания и умения сформированы на базовом уровне. Раздел «Геометрия» нельзя считать сформированным на повышенном уровне (38,31% выполнения задания № 14, 34,13% выполнения задания № 17). Раздел «Уравнения и неравенства» сформирован на повышенном, но не высоком уровне (8,7% выполнения задания №18).

- *Выводы об изменении успешности выполнения заданий разных лет по одной теме / проверяемому умению, виду деятельности*

Существенных изменений нет. См. пояснения в таблице ниже.

Умение выполнять действия с геометрическими фигурами	Результаты по планиметрии и стереометрии в 2025 году на базовом уровне практически не изменились. В течение рассматриваемых трёх лет Проценты выполнения заданий базового уровня по планиметрии изменяются в диапазоне 70-85%, что определяется некоторым небольшим усложнением или упрощением рассматриваемого объекта. Процент выполнения базовой задачи по стереометрии несколько понизился с 82% до 67%, что так же объясняется усложнением геометрического объекта: параллелепипед в 2024 году, конус, вписанный в сферу, в 2025 году. На повышенном уровне проценты выполнения традиционно низкие (стереометрическая задача: 4,54% в 2025 году, 2,3% в 2024 году; планиметрическая задача: 3,27% в 2025 году, 4,6% в 2024 году). Уровень освоения не изменился.
Умение выполнять действия с функциями	На базовом уровне соответствующие задания выполнены. Поскольку трудности решения алгебраических заданий второй части часто связаны с плохим пониманием тригонометрических, логарифмических, показательных функций, вопросов исследования функций, то считаем, что это действие нельзя отнести к достаточно сформированным, как и в 2023 и в 2024 году.
Умение решать уравнения и неравенства	Как и в 2024 году, успешно освоены элементы содержания базового уровня (№6 и №10). Процент выполнения задания повышенного уровня сложности №13 (решение тригонометрического уравнения) практически не меняется (34,69% в 2025 году, 35,5% в 2024 году). Можно сказать, что традиционно варьируется процент выполнения задания, направленного на решение неравенства №15 (8,8% в 2023 году, 21,1% в 2024 году, 10,97% в 2025 году). Считаем, что в целом уровень сформированности умения решать неравенства не меняется, изменения вызваны более или менее «удобными» неравенствами, в решении которых больше или меньше раскрывается проблема несформированности умения решать задачи с неравенствами.
Умение строить и исследовать математические модели. Умение использовать	Мы видим, что задания, направленные на проверку этих умений, решаются на базовом уровне, когда для составления математической модели требуются элементарные математические средства: №10 (задача на движение / совместную работу, процент выполнения в 2023 и 2024 годах чуть больше 60%, в 2025 году около 70%). №9 (в практико-ориентированной задаче выполнить вычисления по заданной формуле: выше 50% в 2023, 2024, 2025 годах).

приобретенные навыки в повседневной жизни	Процент выполнения экономической задачи: 13-16% в 2024 и 2025 годах. Усложнение модели влечет сильное понижение процента выполнения: №19 (5,55% в 2025 году, 14,4% в 2024 году).

- *Выводы о связи динамики результатов проведения ЕГЭ с использованием рекомендаций для системы образования Иркутской области и системы мероприятий, включенных в статистико-аналитические отчеты о результатах ЕГЭ по учебному предмету в предыдущие 2-3 года.*

Как было отмечено в 2.5, результаты ЕГЭ по математике профильного уровня в Иркутской области в 2025 году качественно улучшились по сравнению с результатами прошлых лет (повышение среднего балла, уменьшение процента участников, не достигших минимального балла, увеличение процента участников, набравших выше 60 баллов).

Заметим, что в САО-11 по математике базового уровня (2025) мы констатировали понижение (очень существенное) как уровня обученности, так и качества обучения «на базовом уровне» в течение всех трёх лет рассматриваемого периода.

Возможно, эти два динамических процесса свидетельствуют о расслоении в образовательной среде региона.

Не представляется возможным сделать объективные выводы относительно эффективности использования рекомендаций из статистическо-аналитических отчетов учителями Иркутской области, так как это требует проведения отдельного статистического анализа и опросов участников образовательного процесса.

Раздел 2. РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ

2.1. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета в Иркутской области на основе выявленных типичных затруднений и ошибок

2.1.1. …по совершенствованию преподавания учебного предмета всем обучающимся

Анализ результатов ЕГЭ 2025 по профильной математике позволяет сформулировать рекомендации, прежде всего, для учителей с целью улучшения качества математического образования в Иркутской области.

- *Учителям рекомендуется:*

– Уделять особое внимание методике формирования понятий с позиции системно-деятельностного подхода. Организовывать деятельность по формированию действий адекватных содержанию формируемого понятия, выбирая прямой путь управления деятельностью школьников, как логических, так и специальных математических. То есть в явном виде представлять алгоритм действия, конструировать систему задач, отражающую полноту возможных ситуация применения понятия и т.п.

– В системе использовать дифференцированный подход для групп обучающихся с разным уровнем математической подготовки.

– Спланировать работу с аналитическими материалами по результатам ЕГЭ для качественной реализации федеральной рабочей программы по математике на всех уровнях преподавания (НОО / ООО / СОО).

– Провести самоаудит, использовать диагностическую карту с сопоставленными перечнем (кодификатор) распределенных по классам проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы НОО / ООО / СОО и элементов содержания по математике с текущими результатами и результатами внешних оценочных процедур. Особое внимание уделять изучению выявленных с использованием данной диагностической карты тем, по которым школьники конкретной группы показывают недостаточные знания и умения.

– Спланировать систематическую работу на учебных занятиях по устранению типичных ошибок по предмету.

– Использовать информационно-коммуникационные технологии, электронные ресурсы и приложения, позволяющие сделать математику более наглядной (создание графиков и диаграмм, работа со статистическими данными, создание чертежей, моделирование геометрических ситуаций и т.д.): GeoGebra, «1С: Математический конструктор», конструктор геометрических фигур и другие рекомендованные ресурсы). Использовать в работе облачную базу вариативных заданий; библиотеку видеоразборов решений (ФИПИ).

– Продолжать системную работу над разделами, содержание которых освоено на достаточном уровне, в том числе: «Числа и вычисления» (Действия с действительными числами, корни, степени); «Уравнения и неравенства» (Линейные, квадратные, дробно-рациональные уравнения); «Функции и графики» (Степенная и показательная функции); Геометрия. Планиметрия, стереометрия (базовый уровень) и развивать умения:

✓ Умение решать линейные, квадратные, дробно-рациональные уравнения

✓ Умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

– Обратить особое внимание на освоение разделов, содержание которых недостаточно освоено выпускниками, в том числе: «Числа и вычисления» (Элементы тригонометрии); «Вероятность и статистика» (Вероятность); «Начала математического анализа».

– Выделить время в рамках урочной или внеурочной деятельности на формирование УУД, чаще всего входящих в группу действий, адекватных содержанию понятия: распознавания, действие выведение следствия из факта принадлежности объекта к объему понятия, действие приведение примеров и контрпримеров, действие классификации. Они должны стать основой понимающего усвоения материала, а также средством текущего контроля, позволяющего выделить проблемные зоны в усвоении содержания обучения. Например, учитель может предложить школьникам составить примеры и контрпримеры к изучаемому понятию, на основе выделенных существенных признаков и выделенной связи между ними. Анализ учителем представленных детьми объектов позволяет выявить неверное понимание школьником материала и своевременно оказать адресную помощь.

– При решении каждого задания важно проходить все этапы: 1) внимательно прочитать условие, выделить в тексте ключевые моменты; 2) выполнить вычисления (рассуждения); 3) зафиксировать полученный ответ; 4) проверить правильность ответа, решив обратную задачу, подставив корни в уравнение или оценив полученный ответ прикидкой ожидаемого результата, а при решении задачи проверить реалистичность полученного ответа; 5) прочитать еще раз вопрос в задании и убедиться, что ответь получен именно на него. После прохождения всех этапов решения задания у обучающегося должно сформироваться внутреннее убеждение: «Я сделал задание верно!»;

– Уделить особое внимание формированию метапредметных умений и навыков, позволяющих успешно выполнять познавательную деятельность на базовом уровне:

✓ Умение осуществлять поиск решения, выдвигая гипотезы, основанные на индуктивных предположениях и аналогиях, анализе логических и математических связей между объектами задачи (навыки исследовательской деятельности);

✓ Умение осуществлять планирование в выполнении задания и самоконтроль при выполнении его этапов.

– Освоить общедидактические методы и приёмы, которые могут повысить качество математического образования, в том числе:

✓ Алгоритмизация. Использовать общедидактический алгоритм при выполнении типичных заданий обучающимися: «Чтение → Визуализация → Анализ → Решение».

✓ Логичность. Уделять внимание способам установления зависимости: между величинами в задаче, между условием и вопросом, между результатом решения составленной математической модели и условием (интерпретацией результата).

✓ Систематизация. Обсуждать различные подходы и методы решения одной и той же задачи, сравнивать различные способы решения, их трудоемкость и способы упрощения.

✓ Конкретизация. Явно выделять, какой математический факт или какое утверждение стали ключевыми в решении, и позволили успешно решить задачу.

– Использовать для проверки решения заданий в работе на разных этапах урока чек-листы.

– Для формирования и развития умений обучающихся выполнять тождественные преобразования, решать уравнения и неравенства учителю целесообразно наряду с типичными заданиями включать в учебный процесс такие задания, которые стимулировали бы узнавание изучаемых конструкций, применение правил, алгоритмов в разнообразных ситуациях. Количество заданий должно быть достаточным, чтобы у каждого учащегося сформировался опыт решения. Базовые задачи должны быть основой этой серии, на которые опираются задачи, представленные в неявном виде, отличным от предыдущего. При изучении каждого следующего класса задач включать серию заданий, преобразование которых сводится к изученным.

Учителям, работающим в начальной школе, рекомендуется:

– На основании результатов ЕГЭ уделить особенное внимание методике обучения решению уравнений, формированию понятия «Неравенство», способам сравнения числовых величин.

– Внести коррективы в методику работы над текстовыми задачами с учётом результатов оценочных процедур.

– Системно вести работу над формированием вычислительных навыков обучающихся, в том числе освоению приёмов рационального и устного счёта.

Учителям 5-6 классов рекомендуется:

– Уделять особое внимание формированию вычислительных навыков, в том числе действиям с обыкновенными и десятичным дробями, переводом одной записи дроби в другую.

– Выделить время на обучение обобщенным приемам работы над текстовой задачей. Продолжать обучение арифметическим методам решения сюжетных задач, начатое в начальной школе.

– Регулярно проводить устный счёт, целью которого является формирования вычислительной культуры школьников. Устный счёт будет эффективным обучающим средством, если он способствует многократному повторению важных мыслительных действий и распознаванию базовых математических конфигураций. Известно, что навыки устного счёта развивают чувство числа, помогают увидеть путь решения задачи, провести прикидку и оценку результатов вычисления.

– Проводить математические квесты, квизы с использованием практико-ориентированных задач.

Учителям 7-9 классов рекомендуется:

– Создавать условия для поддержки вычислительных навыков.

– Целесообразно формировать у обучающихся 8 класса умение решать квадратные уравнения устно через теорему Виета, использование вариаций коэффициентов. Также необходимо увеличивать уровень сложности решаемых уравнений.

– Формировать осознанность использования математических методов: метод равносильных переходов, метод замены, метод разложения на множители и функционально-графический. Последний из них позволяет организовать работу в рамках функциональной содержательно-методической линии, позволит показать возможность аппарата функции для работы с математическими моделями.

– Рекомендовано ознакомить обучающихся с таким методом самоконтроля, как проверка на частных случаях. Это может помочь школьникам обнаружить неверно найденные значения переменной и продумать другой, возможно правильный, вариант решения. Это позволит сформировать владение аппаратом тождественных преобразований, решения уравнений, неравенств, их систем и совокупностей.

– Уделять особое внимание систематическому изучению курса геометрии. Рекомендуется обратить внимание на:

✓ построение геометрических чертежей, т.к. правильно построенный чертеж является залогом успешного решения задачи, а искажение геометрической конфигурации – серьезная проблема, которая будет мешать в поиске решения задачи;

✓ методике формирования понятий и работе с теоремой;

✓ методам поиска решения задач;

✓ доказательство утверждений, т.е. формирование умений аргументированно обосновывать каждый шаг со ссылками на соответствующие теоремы, определения и т.п., а также запись доказательства. Причем в 7-9 классах оформления процесса решения геометрической задачи, особенно у школьников с низким уровнем математической подготовки, необходимо осуществлять по схеме утверждение – обоснование, позволяющей акцентировать внимание учащихся на необходимость обоснования каждого шага решения и понимания процесса установления причинно-следственных связей;

✓ использование средств ИКТ, привлечение которых позволит визуально иллюстрировать изменения геометрических конструкции от изменения параметров их характеристик.

– Эффективным средством обучения решению геометрических задач служит использование в учебном процессе задач по готовым чертежам. Представление задач в такой форме позволяет повторить и овладеть значительным объёмом материала за минимальный промежуток времени; учат грамотному рассуждению, нахождению в чертежах общего и отличительного, сопоставлению и противопоставлению, формулированию правильных выводов; повышают творческую активность учащихся; развивают логическое мышление. Но этот тип представления задач не должен исключить задачи, представленные в словесной форме, так как приведет к проблеме несформированности умения построение геометрических чертежей. Отбор задач определяется дидактической целью урока.

– Проводить практикумы по построению геометрических моделей реальных ситуаций, тренинги по решению практико-ориентированных задач.

Учителям 10-11 классов рекомендуется:

– Организовать систему повторения материала, изученного ранее в 1-9 классах.

– При формировании навыков решения задач базового уровня сложности обучающихся использовать чек-листы, конспекты, наглядные тексты-опоры для достижения предметных и метапредметных результатов освоения основной образовательной программы, для эффективного запоминания и систематизации материала.

– Использовать на различных этапах уроках технологии преодоления ошибок:

✓ «Разбор полетов» – анализ типичных ошибок региона;

✓ «Реверсивные задачи» – составление заданий с заведомыми ошибками;

✓ «Математический биатлон» – скоростное решение с проверкой.

– Для работы с заданиями повышенного и высокого уровня сложности

✓ организовать индивидуальную, групповую работу с обучающимися на основании диагностики их образовательных потребностей;

✓ организовать работу спецкурсов, факультативов для освоения заданий повышенного и высокого уровня сложности;

– С целью формирования самостоятельности, ответственности, действий самоконтроля и самооценки у школьников включать в процесс обучения задачи с неопределенностью в условии, задачи с избыточными данными, провокационные задачи, представлять готовые решения как верные, так и содержащие ошибку для обсуждения школьникам и осуществления оценки верности решения, с указанием приемов самоконтроля.

– Учить обучающихся внимательного читать текстовые задания и выполнять их, планировать письменное высказывание и строить его в соответствии с планом. Учить выделять условие задачи, главные вопросы, составлять краткую запись в различных формах (рисунок, таблица, график).

– Развивать умение отбирать материал, данный в условии неявно, используя собственный жизненный опыт, интуицию, практику решения учебных и практических задач на всех уровнях обучения.

– В области обучения письменной речи и выполнения заданий II части экзамена:

✓ учить обучающихся внимательного читать текстовые задания и выполнять их, планировать письменное высказывание и строить его в соответствии с планом;

✓ учить выделять условие задачи, главные вопросы, составлять краткую запись в различных формах (рисунок, таблица, график);

✓ развивать умение отбирать материал, данный в условии неявно, используя собственный жизненный опыт, интуицию, практику решения учебных и практических задач на всех уровнях обучения.

○ *Муниципальным методическим службам*

Рекомендуется спланировать методическую работу учителей математики на муниципальном уровне, включив в нее:

– Работу со статистико-аналитическими материалами по результатам ЕГЭ 2025 года для выявления адресных дефицитов школьников муниципалитета в освоении федеральной рабочей программы по математике на всех уровнях преподавания. Провести не менее 1 муниципального мероприятия.

– Муниципальное / межшкольное мероприятие по сопоставлению перечня (кодификатора) распределенных по классам проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы НОО / ООО / СОО и элементов содержания по математике с текущими результатами и результатами внешних оценочных процедур по математике на муниципальном уровне, уделяя особое внимание работе с педагогами общеобразовательных учреждений с небольшим (по штатному расписанию) количеством учителей, наличием молодых специалистов, педагогов с непрофильным базовым образованием, с педагогами школ отдаленных, труднодоступных районов.

– Серию очных методических мероприятий по устранению выявленных адресных дефицитов школьников с разным уровнем математической подготовки, направленных на освоение педагогами обоснованных форм, эффективных методов повышения качества обученности педагогами, обучающиеся которых показывают высокие образовательные результаты, в том числе открытые уроки, мастер-классы, методические школы и др. (не менее двух мероприятий).

– Очные муниципальные мероприятия, направленные на повышение квалификации учителей математики по формированию предметной и оценочной компетентности учителей математики.

– Контроль выполнения составленного плана повышения качества обученности по математике общеобразовательными организациями с фиксацией устранения/уменьшения образовательных дефицитов, выявленных у обучающихся при проведении контрольно-оценочных процедур (входной, промежуточный и итоговый контроль, входит в 10%).

- *ИРО, иным организациям, реализующим программы профессионального развития учителей*

Рекомендуется спланировать методическую работу учителей математики на региональном уровне, включив в нее:

– Работу со статистико-аналитическими материалами по результатам ЕГЭ в2025 года для выявления типичных дефицитов школьников в освоении федеральной рабочей программы по математике на всех уровнях преподавания, фиксации типичных ошибок учащихся.

– Цикл мероприятий для учителей по устранению учебных дефицитов школьников с разным уровнем математической подготовки в соответствии с перечнем (кодификатором) распределенных по классам проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы НОО / ООО и элементов содержания по математике с результатами внешних оценочных процедур, уделяя особое внимание работе с педагогами общеобразовательных учреждений с небольшим (по штатному расписанию) количеством учителей, наличием молодых специалистов, педагогов с непрофильным базовым образованием, педагогами школ отдаленных, труднодоступных районов.

– Цикл мероприятий для учителей по использованию эффективных форм, приемов работы, демонстрацию лучших практик обучения математике, в том числе мастер-классы, практикумы, методические школы и др.

– Создание условий для обмена передовым педагогическим опытом учителей математики, включающие в себя организацию и проведение конференций, методических школ, вебинаров, в том числе на региональной образовательной платформе «Образование для жизни».

– Проведение «микрокурсов», консультаций учителей математики (по 15-30 мин) по сложным темам ЕГЭ на основании аналитических данных профильного экзамена по математике в 2025 году.

– Очные региональные мероприятия, курсы повышения квалификации, направленные на повышение предметной и оценочной компетентности учителей математики для профильного преподавания математики.

– Образовательные события (супервизии) с экспертами региональной предметной комиссии по математике.

– Обмен эффективными практиками достижения предметных результатов реализации федеральной рабочей программы на профильном базовом уровне.

– Для школ с низкими образовательными результатами ЕГЭ по профильной математике разработать и использовать систему тьюторского сопровождения.

– Для возможности проведения самоаудита учителем для определения тем, по которым школьники конкретной группы показывают недостаточные знания и умения, составить диагностическую карту с сопоставленными перечнем (кодификатор) распределенных по классам проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы НОО / ООО / СОО и элементов содержания по математике с текущими результатами и результатами внешних оценочных процедур.

2.1.2. …по организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки

- *Учителям*

Спланировать индивидуальный образовательный маршрут с включением в него методической работы по:

– Составлению и внедрению собственного плана работы по устранению выявленных дефицитов школьников с разным уровнем математической подготовки, включая использование обоснованных форм, методов и приемов работы.

– Регулярному участию в методических мероприятиях по работе с обучающимися с разным уровнем математической подготовки.

– Изучению и использованию методических материалов, в том числе Методических рекомендаций для учителей по преподаванию учебных предметов в образовательных организациях с высокой долей обучающихся с рисками учебной неуспешности, МАТЕМАТИКА, авторы: И.В. Ященко, А.В. Семенов; САО ЕГЭ по профильной математике 2025 года.

– Участию в очных муниципальных / региональных мероприятиях, направленных на повышение собственной профессиональной компетентности при работе с обучающимися с разным уровнем математической подготовки.

Учитывая разный уровень математической подготовки обучающихся, их интересы, а также необходимость создания равных стартовых возможностей для изучения математики, полезно в учебном процессе использовать технологию уровневой дифференциации.

При работе с обучающимися с низким уровнем математической подготовки (риск не преодоления минимального балла):

– Использовать пошаговые инструкции, шаблоны оформления, опорные схемы для решения типовых заданий, алгоритмические памятки с пошаговыми решениями, тренажеры элементарных навыков.

– Систематически проводить закрепление и повторение изученного материала, в том числе с использованием тренажёров, электронных образовательных ресурсов.

– Использовать устные упражнения как подготовку к восприятию нового материала, как иллюстрацию изучаемых правил, законов, а также на этапах закрепления и повторения изученного.

– При изучении текущего материала рекомендуем использовать наборы заданий из открытых банков, обеспечивающих прохождение аттестационного рубежа.

– Проводить «пробные» работы без оценки, используя «лист прогресса» вместо отметок.

– Предложить ученикам мини курсы по выбору (по заданиям, которые вызывают затруднения).

– Разработать индивидуальные образовательные маршруты для обучающихся по освоению содержания тем, которые вызвали затруднения у обучающихся.

– После получения удовлетворительных результатов решения заданий по отдельным темам можно формировать варианты, состоящие из нескольких заданий по разным темам, на выполнение которых давать 10-15 минут. Примеры таких подборок можно найти в рекомендациях ФИПИ на официальном сайте (ФГБНУ «ФИПИ»).

При работе с обучающимися со средним уровнем математической подготовки кроме использования вышеуказанных мероприятий можно рекомендовать:

– Организовывать самостоятельную работу обучающихся по изучению теории, различных способов решения одной и той же задачи через просмотр видео материалов и / или обучающих роликов в сети Интернет.

– После просмотров проводить урок / внеурочное занятие с целью разбора сложных моментов теории и закрепления материала на практика (ответы на вопросы учащихся по задания).

– Предложить ученикам мини-курсы по выбору (разбор типовых ошибок по статистике ЕГЭ).

– Использовать дифференцированные карточки трёх уровней сложности в одном задании: базовый / средний / продвинутый) с возможностью выбора уровня самим обучающимся.

– При закреплении, повторении материала организовывать работу в парах, предусматривающую самостоятельную работу и взаимопроверку решения.

– Анализ типичных ошибок через разбор реальных работ обучающихся данной группы.

При работе с обучающимися с высоким уровнем математической подготовки рекомендуется:

– Стартовая диагностика (август/сентябрь), промежуточные срезы (раз в 2 месяца).

– Решение нестандартных задач с реальным контекстом.

– Задачи с избыточными / недостаточными данными.

– Предложить ученикам мини курсы по выбору (Анализ нестандартных решений; подготовка к вузовским олимпиадам. Сравнение разных способов решения. Поиск оптимальных алгоритмов).

– Формирование гибких групп внутри класса с ротацией 1 раз в месяц.

– Станции активности на уроке (разные задания для разных групп).

– «Математические бои» - соревнования между подгруппами.
– Пробные ЕГЭ в условиях, приближенных к реальным.
– Ведение индивидуальных карт прогресса.
– Работа с родителями о ресурсах сети Интернет, о результатах пробных испытаний и текущей успеваемости.
– Использование персональных чек-листов подготовки, мобильных приложений для тренировки.
– Использовать дифференцированный подход в текстах домашних, контрольных, проверочных и других работах.
– Включение в содержание уроков индивидуальных заданий, направленных на формирование универсальных действий и умения применять знания в практической деятельности, анализировать, сопоставлять, делать выводы в нестандартных ситуациях и ситуациях неопределённости.

o *Администрациям образовательных организаций*

Спланировать и создать условия для методической работы учителей математике школы по:

– Составлению плана работы по устранению выявленных дефицитов школьников с разным уровнем математической подготовки, включая использование эффективных форм, методов и приемов работы.
– Составлению и проведению циклов занятий/спецкурсов и др. для обучающихся с высоким уровнем подготовки по математике.
– Составлению и проведению циклов занятий/спецкурсов и др. для обучающихся с низким уровнем подготовки по математике.
– Изучению и использованию методических материалов, в том числе Методических рекомендаций для учителей по преподаванию учебных предметов в образовательных организациях с высокой долей обучающихся с рисками учебной неуспешности, МАТЕМАТИКА, авторы: И.В. Ященко, А.В. Семенов; САО ЕГЭ по профильной математике 2025 года.
– Включению в эту работу мероприятий, нацеленных на повышение качества обученности разных групп обучающихся с высоким, средним и низким уровнем математической подготовки.

– Направлению учителей в другие образовательные организации для обмена опыта и стимулирование участия педагогов в очных муниципальных и региональных мероприятиях, направленных на повышение качества обученности по математике.

– Повышению квалификации учителей математики в различных формах для организации разноуровневой групповой работы с обучающимися.

o *Муниципальным методическим службам*

Спланировать методическую работу учителей математики на муниципальном уровне по:

– Проведению серии мероприятий по устранению выявленных в ходе анализа учебных дефицитов школьников с разным уровнем математической подготовки через освоение педагогами обоснованных форм, приемов работы с обучающимися с разными уровнями математической подготовки, эффективность которых демонстрируют другие учителя.

– Проведению очных муниципальных мероприятий, направленных на повышение качества обученности обучающихся, имеющими высокий уровень подготовки по математике.

– Стимулированию общеобразовательных организаций на участие в совместных межшкольных мероприятиях для школьников, планирующих сдавать ЕГЭ по математике в 2026 году на профильном уровне.

o *ИРО, иным организациям, реализующим программы профессионального развития учителей*

Спланировать методическую работу учителей математики на региональном уровне по:

– Распространению передового опыта учителей математики в вопросах организации дифференцированного обучения, например, проведение регионального конкурса методических разработок учителей по интеграции учебных предметов: математики и географии, математики и информатики, математики и физики, математики и истории и т.д.

– Проведению мероприятий для учителей математики по решению заданий профильного уровня внешних оценочных процедур, в т.ч. с привлечением экспертов региональной предметной комиссии и педагогов, чьи обучающиеся демонстрируют высокие результаты на экзаменах.

– Проведение очных стажировок в школах-лидерах, супервизии с экспертами ЕГЭ.

– Организации работы с педагогами, обучающиеся которых показывают низкие образовательные результаты на профильном ЕГЭ по математике, включая консультационные дни, «Академические десанты» в муниципальные образования по результатам ЕГЭ.

– Реализации системы тьюторского сопровождения педагогов в рамках ИОМ.

2.2. Рекомендуемые темы для обсуждения / обмена опытом на методических объединениях учителей-предметников, в том числе по трансляции эффективных педагогических практик ОО с наиболее высокими результатами

- *Темы для обсуждения на методических объединениях учителей математики разного уровня:*

– Результаты ЕГЭ по математике (профильный уровень).

– Опыт использования цифровых инструментов и сервисов на уроках математики в 10-11 классах.

– Развитие креативного мышления средствами профильной математики.

– Кейсы из работ выпускников с геотаггингом (по районам области).

– Интерактивный анализ «цепочки ошибок» в сложных задачах.

– ТОП-5 «нерешаемых» задач профильного уровня.

– Параметрические задачи: алгоритмы визуализации.

– Стереометрия: от плоского чертежа к 3D-моделированию.

– Экономические задачи: перевод условия в математическую модель.

2. *Трансляция эффективных практик*

– Из опыта школ – лидеров по результатам профильного ЕГЭ по математике в 2025 году:

✓ «Формула успеха»;

✓ «Геометрический интенсив»;

✓ «Финансовый практикум».

2.3. Рекомендуемые направления повышения квалификации работников образования

Рекомендовано проводить повышение квалификации учителей математики в различных формах: онлайн- курсы с практикой, очные мастер классы, стажировки в школах-лидерах, индивидуальные консультации

Повышение квалификации учителей математики в вопросах:

– Работа с обучающимися с низким уровнем математической подготовки по профильной математике, в том числе через проведение региональных вебинаров по адаптации заданий для слабоуспевающих (освоение схем, разработка алгоритмов-подсказок).

– Работа с обучающимися со средним уровнем математической подготовки по профильной математике, в том числе через проведение мастер-классов по темам:

✓ Как научить школьников «читать» математические тексты;

✓ «От предметных знаний к метапредметным результатам»;

✓ «Геометрия на практике: от чертежа к решению»;

✓ «Развитие самоконтроля при решении задач».

– Работа с обучающимися с высоким уровнем математической подготовки, в том числе стратегии подготовки высокомотивированных учеников (олимпиадные задачи с метапредметным контекстом).

– Достижение метапредметных результатов при освоении основной образовательной программы.

– Применение цифровых ресурсов с автоматической дифференциацией на уроках математики.

2.4. Рекомендации по другим направлениям

- *РМО учителей математики ППО*

Рекомендуется активное участие учителей математики в деятельности регионального предметного сообщества «Математика». С привлечением региональных методистов проведение образовательных событий:

– Мастер-классы педагогов-новаторов, региональных методистов. Например, «"Живые" решения сложных задач у доски с комментариями»; «Моделирование как важное средство решения математических задач».

– Тематические круглые столы, мастер-классы, вебинары, в том числе:

- ✓ «"Математическая тревожность": способы преодоления»;
- ✓ «Цифра и бумага: оптимальный баланс при обучении
- ✓ «"После ЕГЭ": как сохранить интерес к предмету».

– Проект "Математический мост": пары «сильная школа» - «слабая школа».

– Дискуссионные площадки по актуальным темам:

- ✓ Как адаптировать лучшие практики для школ с низкими показателями по ЕГЭ?
- ✓ Баланс между «натаскиванием» и развитием мышления;
- ✓ Эффективные способы работы со «середнячками».

СОСТАВИТЕЛИ АНАЛИЗА по учебному предмету:

Специалисты, привлекаемые к анализу результатов ОГЭ по учебному предмету:
Гаер Максим Александрович, Зенцов Андрей Григорьевич, Лапшина Елена Сергеевна, Бычкова ольга Ивановна

Специалисты, привлекаемые к подготовке методических рекомендаций на основе результатов ОГЭ по учебному предмету:
Кириллова Татьяна Николаевна, Присакарь Светлана Владимировна, Федорова Елена Ивановна, Казарина Вера Викторовна