Министерство образования Иркутской области
Государственное автономное учреждение Иркутской области
«Центр оценки профессионального мастерства, квалификаций педагогов и мониторинга качества образования»

М.А. Гаер, А.Г. Зенцов, Е.С. Лапшина, О.И. Бычкова

Методический анализ результатов ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)
в Иркутской области в 2024 году

Иркутск, 2024

РАЗДЕЛ 1. ХАРАКТЕРИСТИКА УЧАСТНИКОВ ЕГЭ ПО УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ[1]

1.1. Количество[2] участников ЕГЭ по учебному предмету (за 3 года)

Таблица 1

2022 г.		2023 г.		2024 г.	
чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
6047	46,3	5530	45,7	5499	46,3

1.2. Процентное соотношение юношей и девушек, участвующих в ЕГЭ (за 3 года)

Таблица 2

Пол	2022 г.		2023 г.		2024 г.	
	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
Женский	2705	44,7	2330	42,1	2210	40,2
Мужской	3342	55,3	3200	57,9	3289	59,8

1.3. Количество участников экзамена в регионе по категориям (за 3 года)

Таблица 3

Категория участника	2022 г.		2023 г.		2024 г.	
	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
ВТГ, обучающихся по программам СОО	6018	99,5	5490	99,3	5458	99,3

---

[1] Для анализа использовался массив результатов основного дня основного периода ЕГЭ

[2] Количество участников основного периода проведения ЕГЭ

ВТГ, обучающихся по программам СПО	28	0,5	38	0,7	35	0,7

1.4. Количество участников экзамена в регионе по типам ОО

Таблица 3

№ п/п	Категория участника	2022 г.		2023 г.		2024 г.	
		чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
1.	выпускники лицеев и гимназий	1460	24,2	1422	25,7	1426	26
2.	выпускники СОШ	4021	66,5	3622	65,5	3645	66,3
3.	выпускники СОШ с углубленным изучением отдельных предметов	397	6,6	320	5,8	332	6
4.	выпускники СОШ-интернатов	77	1,3	67	1,2	9	0,2
5.	выпускники СПО	28	0,5	38	0,7	35	0,6
6.	выпускники вечерних СОШ	29	0,5	43	0,8	30	0,6
7.	выпускники кадетских корпусов	32	0,5	18	0,3	17	0,3
8.	выпускники ОО для обучающихся с нарушением зрения	2	0,03	0	0	2	0,04

1.5. Количество участников ЕГЭ по учебному предмету по АТЕ региона

Таблица 4

№ п/п	Наименование АТЕ	Количество участников ЕГЭ по учебному предмету	% от общего числа участников в регионе
1.	г. Иркутск	1980	16,7
2.	Ангарский городской округ	591	5,0
3.	МО города Братска	485	4,1
4.	МО город Усолье-Сибирское	209	1,8

5.	Иркутское районное МО	206	1,7
6.	МО город Усть-Илимск	175	1,5
7.	Муниципальное образование "Тайшетский район"	158	1,3
8.	МО Шелеховский муниципальный район	144	1,2
9.	МО город Тулун	113	1,0
10.	МО город Саянск	105	0,9
11.	МО "Нижнеудинский район"	103	0,9
12.	МО город Черемхово	94	0,8
13.	Слюдянский муниципальный район	89	0,8
14.	МО Нижнеилимский район	88	0,7
15.	Усть-Кутское МО	78	0,7
16.	МО "Эхирит-Булагатский район"	72	0,6
17.	Усольский муниципальный район Иркутской области	61	0,5
18.	МО Братский район	56	0,5
19.	Зиминское городское МО	51	0,4
20.	МО Иркутской области Казачинско-Ленский район	51	0,4
21.	МО Заларинский район	48	0,4
22.	Осинский муниципальный район	43	0,4
23.	Чунское районное МО	43	0,4
24.	МО Баяндаевский район	38	0,3
25.	МО Куйтунский район	38	0,3
26.	Черемховское районное МО	37	0,3
27.	МО Боханский район	35	0,3
28.	МО Нукутский район	34	0,3
29.	МО "Аларский район"	33	0,3
30.	МО Тулунский район	28	0,2
31.	МО Качугский район	27	0,2
32.	МО Киренский район	23	0,2
33.	Ольхонское районное МО	22	0,2

34.	МО г. Бодайбо и района	20	0,2
35.	МО город Свирск	19	0,2
36.	Зиминское районное МО	17	0,1
37.	Районное МО Усть-Удинский район	16	0,1
38.	МО Жигаловский район	14	0,1
39.	МО Балаганский район	11	0,09
40.	МО Усть-Илимский район	9	0,08
41.	МО Катангский район	7	0,06
42.	МО Мамско-Чуйский район	6	0,05

1.6. Прочие характеристики участников экзаменационной кампании (при наличии)

Нет.

1.7. ВЫВОДЫ о характере изменения количества участников ЕГЭ по учебному предмету

Процент участников ЕГЭ по математике профильного уровня от общего числа участников ЕГЭ в Иркутской области за последние три года практически не меняется и составляет около 46 %. В абсолютных значениях число таких участников также остается почти одинаковым, особенно в два последние года (2023 г. – 5530 человек, 2024 г. – 5499 человек). Это значит, что и общее число участников экзамена почти не меняется в последние годы, несмотря на то что количество участников обязательного ОГЭ по математике в Иркутской области (ОГЭ сдают все выпускники 9-х классов) ежегодно растет, и притом значительно (примерно на 10–15 % в год).

Получается, что, с одной стороны, количество молодых людей возраста, соответствующего выпускникам 11-х классов текущего года, за последние три года выросло значительно. А с другой стороны, число участников ЕГЭ в целом и по математике в частности остается неизменным. Что касается общего числа участников ЕГЭ, то мы можем предположить, что количество 10–11-х классов в Иркутской области не меняется и после выпуска из 9-х классов ежегодно в 10-е классы идет учиться одно и то же количество школьников.

Неизменное количество выпускников Иркутской области, принимающих участие в ЕГЭ по математике профильного уровня, говорит, на наш взгляд, о том, что интерес выпускников нашего региона к специальностям в вузах, где требуется результат ЕГЭ по математике (профиль), как не увеличивается, так и не уменьшается.

Из таблицы 2–2 видно, что процент участия девушек в ЕГЭ по математике профильного уровня в Иркутской области за последние три года постепенно уменьшается (примерно на 2 % в год). А процент юношей, соответственно, увеличивается. Однако это не связано с общим числом участников ЕГЭ в Иркутской области. Суммарно среди участников ЕГЭ по математике профильного и базового уровней в Иркутской области (а это фактически все участники ЕГЭ, так как ВТГ составляют 99,5 %) ежегодно в 2022–2024 гг. девушки составляли 45 %, юноши – 55 %. Таким образом, в 2022 году ЕГЭ по математике профильного уровня выбрали 40 % из всех девушек – участниц ЕГЭ в Иркутской области, в 2023 году – 37 %, а в 2024 году – уже 35 %. То есть процент участия девушек в ЕГЭ по математике профильного уровня в Иркутской области уменьшается именно за счет предпочтения девушками экзамена по математике базового уровня. Можно предположить, что такое положение дел связано с тем, что девушки все чаще выбирают для сдачи ЕГЭ другие предметы, а значит, и вузы, в которых результаты ЕГЭ по математике не требуются для поступления. Поэтому они выбирают экзамен по базовой математике, являющейся обязательным для получения аттестата о среднем образовании (разумеется, в том случае, если выпускник не выбрал экзамен по профильной математике).

Соотношение участников ВТГ, обучающихся по программам СОО и обучающихся по программам СПО в Иркутской области, за последние три года не меняется. Обучающихся по программам СПО среди участников около 0,5 % и составляет 28–38 человек из почти 6000 участников. Это, на наш взгляд, говорит о том, что среди выпускников СПО непопулярно продолжение обучения в вузе, по крайней мере по специальностям, требующим при поступлении результаты ЕГЭ по математике профильного уровня. Правда, здесь есть еще один нюанс, касающийся юношей – выпускников СПО. Они все призывного возраста и по окончании СПО уходят служить в армию РФ.

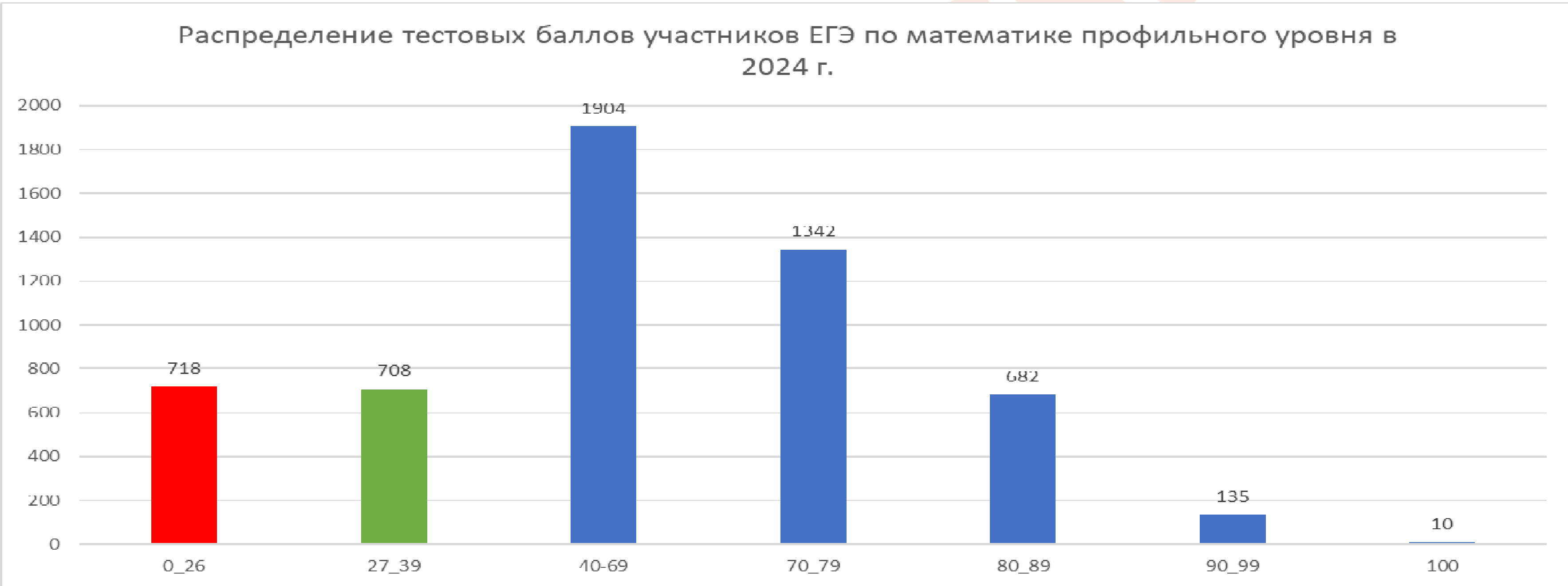
Анализ данных в таблице 2–4 о количестве участников экзамена в регионе по типам ОО показывает, что за последние три года особых изменений здесь не наблюдается. Немного заметен скачок количества участников выпускников СОШ, лицеев и гимназий, выпускников СОШ с углубленным изучением отдельных предметов при переходе от 2022 к 2023 году: было уменьшение в каждой из этих категорий на порядок 400, 40 и 60 человек соответственно, что от общего числа участников составляет несколько процентов. Это уменьшение связано с тем, что уменьшилось общее количество участников в 2023 году по отношению к 2022 году как раз примерно на 500 человек (примерно с 6000 до 5500 участников ЕГЭ по математике профильного уровня). Распределение же участников этих категорий относительно друг друга в процентном отношении почти не изменилось. Изменение количества участников данных категорий при переходе от 2023 к 2024 году составляет и вовсе несколько человек (23, 4, 12 соответственно). Колебания процентов участников данных категорий относительно общего числа участников экзамена за весь период 2022–2024 годов совсем небольшие, в пределах 0,5–1,0 %.

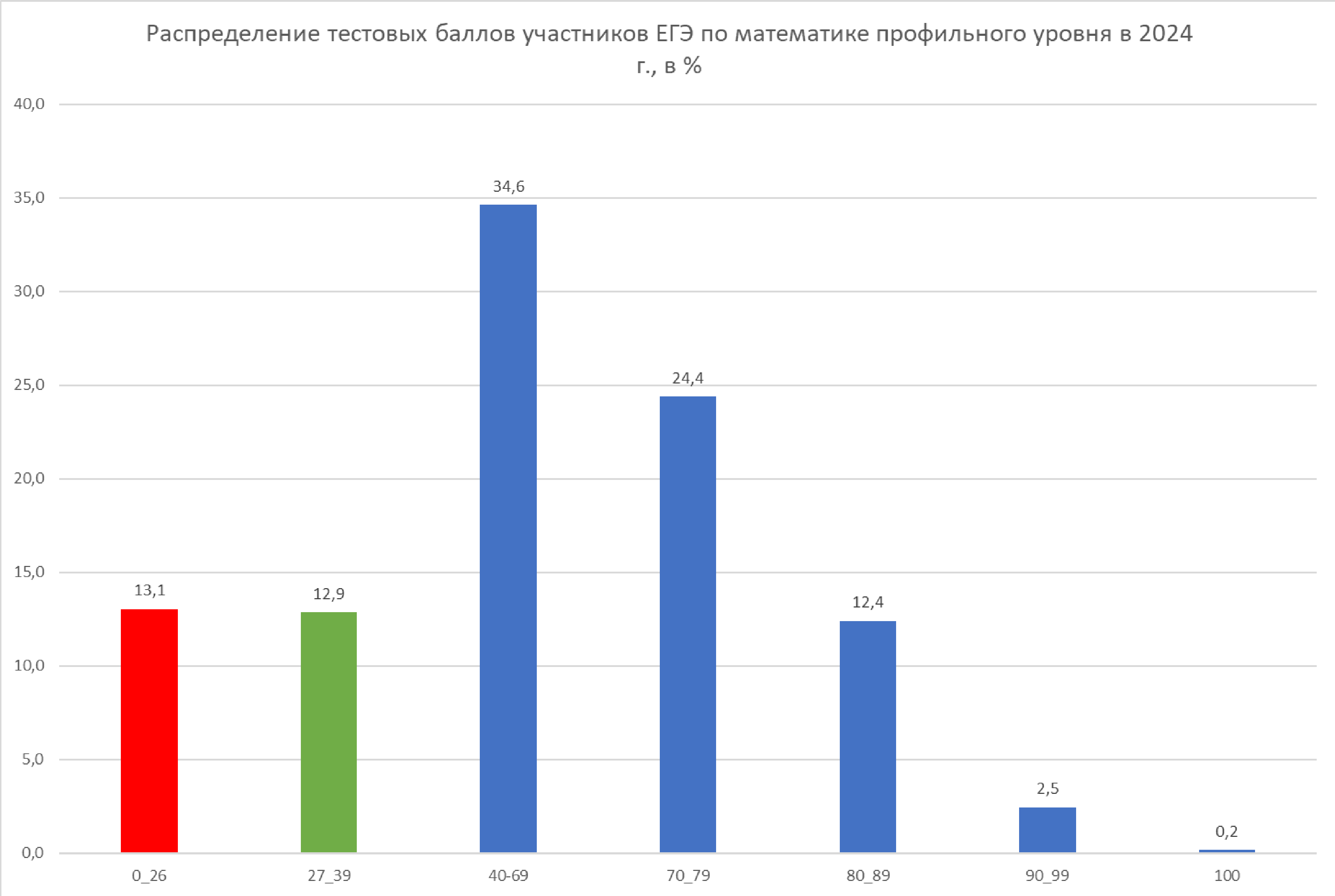
Из 42 АТЕ нашего региона, принявших участие в ЕГЭ по математике профильного уровня, в 2024 году традиционно более половины приходится на три самые крупные из них: г. Иркутск – 1980 участников, Ангарский городской округ – 591 участник, МО города Братска – 485 участников. В 23 АТЕ число участников экзамена было менее 50. В течение последних трех лет никаких резких, сильных изменений в количестве участников каждого АТЕ не было: плюс-минус несколько человек или несколько десятков человек, в зависимости от размера АТЕ, но все это в основном в пределах долей одного процента. Исключением является г. Иркутск – здесь наблюдается уменьшение числа участников более значительное: на 131 выпускника меньше сдавали ЕГЭ по математике профильного уровня в 2023 году по отношению к 2022 году (минус 6,5 %) и на 78 выпускников меньше в 2024 году по отношению к 2023-му (минус 4 %). Однако все это происходит на фоне уменьшения общего числа участников ЕГЭ, тем более что процент участников ЕГЭ по математике профильного уровня относительно всех участников ЕГЭ в г. Иркутске все три года был одинаковый и составлял 17 %.

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЕГЭ ПО ПРЕДМЕТУ

2.1. Диаграмма распределения тестовых баллов участников ЕГЭ по предмету в 2024 г.

Покажем здесь распределение тестовых баллов следующим образом: 0–26 (выпускники, не преодолевшие минимальный балл на аттестат), 27–39 (выпускники, которые преодолели минимальный балл на аттестат, но не прошли порог для поступления в вузы), 40–64 (не полностью справившиеся с первой частью экзамена), 64–69 (в промежуток входят и те, кто не смог подтвердить медаль), 70–79, 80–89, 90–99 (шаг в 10 баллов), и отдельно – стобалльники.




Распределение тестовых баллов участников ЕГЭ по математике профильного уровня в 2024 г., в %
40,0
35,0
30,0
25,0
20,0
15,0
10,0
5,0
0,0
13,1
12,9
34,6
24,4
12,4
2,5
0,2
0_26
27_39
40-69
70_79
80_89
90_99
100

2.2. Динамика результатов ЕГЭ по предмету за последние 3 года

Таблица 6

№ п/п	Участников, набравших балл	Год проведения ГИА		
		2022 г.	2023 г.	2024 г.
1.	ниже минимального балла, %	12,8	9,6	13,1
2.	от минимального балла до 60 баллов, %	51,9	53,3	41,6
3.	от 61 до 80 баллов, %	33,5	34,9	34,1
4.	от 81 до 100 баллов, %	1,8	2,2	11,3
5.	Средний тестовый балл	49,2	50,6	54,7

2.3. Результаты ЕГЭ по учебному предмету по группам участников экзамена с различным уровнем подготовки

2.3.1. В разрезе категорий участников ЕГЭ

Таблица 5

№ п/п	Категории участников	Доля участников, у которых полученный тестовый балл			
		ниже минимального	от минимального балла до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
1.	ВТГ, обучающиеся по программам СОО	12,7	41,6	34,2	11,4
2.	ВТГ, обучающиеся по программам СПО	54,3	31,4	14,3	0,0
3.	ВПЛ	33,3	66,7	0,0	0,0
4.	Участники экзамена с ОВЗ	18,8	29,2	33,3	18,8

2.3.2. в разрезе типа ОО

Таблица 8

№ п/п	Тип ОО	Количество участников, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов

1.	СОШ	3645	16,41	48,48	29,16	5,95
2.	СОШ-интернат	9	33,3	33,3	33,3	0
3.	Лицей, гимназия	1426	4,9	27,4	43,9	23,8
4.	СОШ с углубленным изучением предметов	332	3,3	27,1	50,6	19,0
5.	Кадетский корпус	17	23,5	64,7	11,8	0
6.	ОО для обучающихся с нарушением зрения	2	0	50	0	50
7.	Вечерняя СОШ	30	40	33,3	20	6,7
8.	СПО	35	54,3	31,4	14,3	0

2.3.3. Юношей и девушек

Таблица 6

№ п/п	Пол	Количество участников, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
1.	женский	2210	13,2	40,3	34,9	11,6
2.	мужской	3289	13,0	42,4	33,5	11,2

2.3.4. в сравнении по АТЕ

Таблица 7

№ п/п	Наименование АТЕ	Количество участников, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
1.	г. Иркутск	1980	12,4	37,1	34,9	15,6
2.	Ангарский городской округ	591	9,5	37,4	36,6	16,6
3.	МО города Братска	485	11,6	41	37,7	9,7

№ п/п	Наименование АТЕ	Количество участников, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
4.	МО город Усолье-Сибирское	209	12,4	49,3	30,6	7,7
5.	Иркутское районное МО	206	19,9	47,6	29,1	3,4
6.	МО город Усть-Илимск	175	6,3	35,4	41,7	16,6
7.	Муниципальное образование "Тайшетский район"	158	14,6	50,6	29,8	5,1
8.	МО Шелеховский муниципальный район	144	6,9	34,7	36,1	22,2
9.	МО город Тулун	113	7,1	37,2	49,6	6,2
10.	МО город Саянск	105	21	35,2	35,2	8,6
11.	МО "Нижнеудинский район"	103	14,6	55,3	24,3	5,8
12.	МО город Черемхово	94	6,4	50	41,5	2,1
13.	Слюдянский муниципальный район	89	10,1	42,7	39,3	7,9
14.	МО Нижнеилимский район	88	10,2	50	34,1	5,7
15.	Усть-Кутское МО	78	9	47,4	38,5	5,1
16.	МО "Эхирит-Булагатский район"	72	19,4	41,7	36,1	2,8
17.	Усольский муниципальный район Иркутской области	61	14,8	49,2	29,5	6,6
18.	МО Братский район	56	19,6	53,6	23,2	3,6
19.	Зиминское городское МО	51	11,8	43,1	39,2	5,9
20.	МО Иркутской области Казачинско-Ленский район	51	5,9	58,8	29,4	5,9
21.	МО Заларинский район	48	14,6	29,2	52,1	4,2
22.	Осинский муниципальный район	43	14	55,8	27,9	2,3
23.	Чунское районное МО	43	23,3	53,5	14	9,3
24.	МО Баяндаевский район	38	23,7	52,6	15,8	7,9
25.	МО Куйтунский район	38	23,7	39,5	31,6	5,3

№ п/п	Наименование АТЕ	Количество участников, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
26.	Черемховское районное МО	37	29,7	54,1	16,2	0
27.	МО Боханский район	35	22,9	57,1	17,1	2,9
28.	МО Нукутский район	34	29,4	47,1	17,7	5,9
29.	МО "Аларский район"	33	45,5	36,4	12,1	6,1
30.	МО Тулунский район	28	14,3	53,6	32,1	0
31.	МО Качугский район	27	7,4	74,1	18,5	0
32.	МО Киренский район	23	13	39,1	47,8	0
33.	Ольхонское районное МО	22	22,7	63,6	13,6	0
34.	СПО г.Иркутска	22	45,5	40,9	13,6	0
35.	МО г. Бодайбо и района	20	5	45	40	10
36.	МО город Свирск	19	10,5	47,4	36,8	5,3
37.	Зиминское районное МО	17	41,2	47,1	11,8	0
38.	Районное МО Усть-Удинский район	16	12,5	62,5	12,5	12,5
39.	МО Жигаловский район	14	14,3	50	35,7	0
40.	МО Балаганский район	11	18,2	63,6	9,1	9,1
41.	МО Усть-Илимский район	9	11,1	55,6	22,2	11,1
42.	МО Катангский район	7	14,3	71,4	14,3	0
43.	МО Мамско-Чуйский район	6	50	33,3	16,7	0

2.4. Выделение перечня ОО, продемонстрировавших наиболее высокие и низкие результаты ЕГЭ по предмету

2.4.1. Перечень ОО, продемонстрировавших наиболее высокие результаты ЕГЭ по предмету

В 2024 году в Иркутской области было 162 (из 498) образовательные организации с количеством участников ЕГЭ по математике профильного уровня более 10.

Для формирования перечня ОО, продемонстрировавших наиболее высокие результаты ЕГЭ по математике, использовались следующие критерии:

1) количество участников экзамена (ВТГ) от ОО более 10;
2) доля участников ЕГЭ, не достигших минимального балла, имеет значения не более 3 %;
3) доля участников ЕГЭ, получивших от 81 до 100 баллов, имеет значения не менее 20 %;
4) доля участников ЕГЭ, получивших тестовый балл от минимального до 60, имеет значения не более 30 %.

Таким образом, в перечень вошли 10 образовательных организаций Иркутской области, что составляет около 6 % от 162 ОО с количеством участников более 10.

Таблица 8

№ п/п	Наименование ОО	Количество ВТГ, чел.	Доля ВТГ, получивших тестовый балл			
			от 81 до 100 баллов	от 61 до 80 баллов	от минимального балла до 60 баллов	ниже минимального
1.	МБОУ г. Иркутска гимназия № 1	28	86	11	4	0
2.	МАОУ "Городская гимназия № 1" (МО город Усть-Илимск)	18	56	44	0	0
3.	МБОУШР "Шелеховский лицей" (МО Шелеховский муниципальный район)	63	44	35	19	2
4.	МБОУ "СОШ №10" (Ангарский городской округ)	45	42	38	20	0
5.	МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска	95	41	49	9	0
6.	МБОУ г. Иркутска лицей № 3	116	36	42	20	2
7.	МБОУ г. Иркутска лицей № 2	59	31	46	22	2
8.	МБОУ "Гимназия № 1 имени А.А. Иноземцева" (МО города Братска)	27	26	44	30	0
9.	МАОУ "Экспериментальный лицей имени Батербиева М.М." (МО город Усть-Илимск)	35	23	49	26	3
10.	МАОУ "СОШ № 27" (Ангарский городской округ)	24	21	71	8	0

2.4.2. Перечень ОО, продемонстрировавших низкие результаты ЕГЭ по предмету

В 2024 году в Иркутской области было 162 (из 498) образовательные организации с количеством участников ЕГЭ по математике профильного уровня более 10.

В таблице 2–12 представлен список образовательных организаций, у которых:

1) количество участников экзамена от ОО более 10;
2) доля участников ЕГЭ, не достигших минимального балла, имеет значения не менее 25 %;
3) нет участников, набравших от 81 до 100 баллов;
4) доля участников ЕГЭ, получивших от минимального балла до 60, имеет более 40 %.

Из 162 образовательных организаций с количеством участников экзамена по математике не менее 10 в список вошли 12, что составляет около 7 %.

Таблица 9

№ п/п	Наименование ОО	Количество ВТГ, чел.	Доля ВТГ, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального балла до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
1.	МБОУ г. Иркутска СОШ № 27	23	39	43	17	0
2.	МБОУ г. Иркутска СОШ № 7	18	39	50	11	0
3.	МБОУ г. Иркутска СОШ № 71 им. Н.А. Вилкова	18	39	44	17	0
4.	МБОУ г. Иркутска СОШ № 12	13	31	54	15	0
5.	ГОКУ УГКК (МО город Усолье-Сибирское)	13	31	69	0	0
6.	МБОУ "СОШ № 42" (МО города Братска)	23	30	52	17	0
7.	МОУ ИРМО "Грановская СОШ" (Иркутское районное МО)	17	29	65	6	0
8.	МОУ "СОШ № 5" (МО город Саянск)	17	29	59	12	0
9.	МБОУ "СОШ № 15" (МО город Усть-Илимск)	11	27	55	18	0
10.	МБОУ СОШ № 50 (Слюдянский муниципальный район)	11	27	55	18	0
11.	МБОУ г. Иркутска СОШ № 10 им. П. А. Пономарёва	19	26	58	16	0

№ п/п	Наименование ОО	Количество ВТГ, чел.	Доля ВТГ, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального балла до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
12.	МБОУ "СОШ № 26" (МО города Братска)	12	25	67	8	0

2.5.ВЫВОДЫ о характере изменения результатов ЕГЭ по предмету

В 2024 году по сравнению с результатами 2022 и 2023 годов значительно увеличился средний балл и составил 54,7, что на 4,1 больше, чем в 2023 г., и на 5,5 больше, чем в 2022 г. Основной причиной, на наш взгляд, является изменение в этом году шкалы перевода из первичных баллов в стобалльную. Так, в 2022 и 2023 гг. первая часть КИМ ЕГЭ по профильной математике содержала 11 заданий, что соответствовало 64 баллам по стобалльной шкале, и далее за каждый следующий первичный балл давалось по 2 балла по стобалльной шкале. А в КИМ ЕГЭ-2024 в первую часть было добавлено еще одно задание, что стало соответствовать 70 баллам, затем до 94 баллов был шаг в 2 балла, а далее – шаг в 1 балл. За счет этого выросла доля участников, набравших более 80 баллов: с 2 % в 2022 и 2023 гг. до 11 % в 2024 г. То есть произошло уплотнение участников, набравших более 80 баллов, за счет перемещения таких участников, которые в 2022 и 2023 гг. немного недобирали до 80 баллов, в категорию уже набравших более 80 баллов. В то же время доля участников, набравших от 61 до 80 баллов, осталась неизменной в течение трех последних кампаний ГИА (около 34 %). Однако, как мы написали выше, в 2024 году из этой категории был отток участников в категорию набравших более 80 баллов. А так как доля участников, набравших от 61 до 80 баллов в 2024 году, не изменилась по сравнению с двумя предыдущими периодами, то смеем предположить, что произошло это также (и по тем же причинам) за счет перемещения таких участников, которые в 2022 и 2023 гг. немного недобирали до 60 баллов, в категорию уже набравших более 60 баллов. Таким образом, по нашему мнению, существенное увеличение среднего балла **не** говорит о повышении уровня образования выпускников 2024 года по сравнению с двумя предыдущими периодами, а является лишь следствием изменения перевода первичных баллов в стобалльную шкалу. В подтверждение сказанному также говорит тот факт, что доля участников, набравших балл ниже минимального, в 2024 году составила 13,1 %, что хоть и ненамного, но больше, чем она была в 2022 (12,8 %) и в 2023 (9,6 %) гг.

В разрезе категорий участников ЕГЭ по математике профильного уровня наибольшее число участников – это выпускники текущего года, обучающиеся по программам СОО. Поэтому показатели с их динамикой участников этой категории аналогичны показателям в целом по региону. Число выпускников текущего года, обучающихся по программам СПО, ежегодно около 30–35 человек, что составляет 0,5–0,6 % от числа всех участников ЕГЭ по математике профильного уровня. Среди них каждый год с 2022-го по 2024-й около половины участников ЕГЭ по математике профильного уровня набирали балл ниже минимального. Большинство из другой половины получили результат до 60 баллов. Никто из участников этой категории в течение трех последних лет не набрал более 80 баллов. Доля участников, набравших от 61 до 80 баллов, традиционно небольшая, но нестабильная, то увеличивается, то уменьшается: 2022 г. – 7 % (2 участника), 2023 г. – 5 % (2 участника), 2024 г. – 14 % (5 участников), то есть количество таких выпускников буквально единицы. Аналогичная ситуация с участниками экзамена с ОВЗ – их ежегодно около 50 человек, что составляет около 1 % от всех участников данного экзамена. В 2024 году среди таких участников значительно увеличилась доля набравших более 80 баллов: с 2 % в 2022 и 2023 гг. (1 участник) до 19 % в 2024 г. (9 участников). Причина, думаем, кроется все в той же измененной шкале перевода баллов, о чем мы писали выше. Хотя при столь маленькой выборке участников может быть все что угодно.

В разрезе типа ОО выделим три основные категории: СОШ (3645 участников), лицеи и гимназии (1426 участников) и СОШ с УИП (332 участника). По сравнению с 2022 и 2023 гг. количество участников из двух последних типов ОО практически не изменилось. Количество участников из СОШ в 2023 г. было почти столько же (3622 человека), что меньше, чем в 2022 г., примерно на 400 участников (на 10 %). Все остальные типы ОО представлены малым числом участников. Здесь стоит выделить лишь сильное снижение количества участников из СОШ-интернатов: 2022 г. – 77 выпускников, 2023 г. – 67 выпускников, 2024 г. – 9 выпускников участвовали в ЕГЭ по математике профильного уровня. Доля участников, получивших от 81 до 100 баллов, среди выпускников СОШ увеличилась с 0,5 % в 2022 и 2023 гг. до 6 % в 2024 г., среди выпускников лицеев и гимназий – с 5–6 % до 24 %, среди выпускников СОШ с УИП – с 5–7 % до 19 %. Это, безусловно, заметные изменения показателей, причем в лучшую сторону, но, повторимся, по нашему мнению, это не потому, что повысился уровень образования выпускников нашего региона, а вследствие изменения шкалы перевода баллов.

Любопытная ситуация сложилась в разрезе участников-юношей и участников-девушек. В 2024 г. девушек было примерно на 1000 меньше, чем юношей (2210 и 3289). Однако доли участников из них, набравших тот или иной балл (таблица 2-9), совершенно одинаковые. И если посмотреть данные по двум предыдущим годам, то картина примерно такая же. То есть юноши и девушки сдают ЕГЭ по математике профильного уровня одинаково.

В сравнении по АТЕ количество участников существенно не меняется – колебания есть, но минимальные. Если смотреть доли участников, набравших тот или иной балл, то заметные изменения есть опять только в показателе «доля участников, набравших от 81 до 100 баллов». Так, в 2022 г. максимум среди территорий было 3 % таких участников, в 2023 г. – 6 %, а в 2024 г. – 22 %. В 2022 и 2023 гг. рассматриваемый показатель был ненулевым примерно в 40 % территорий Иркутской области, а в 2024 году ненулевую долю участников, набравших более 80 баллов, показали 77 % наших территорий.

При составлении перечня ОО, продемонстрировавших наиболее высокие и наиболее низкие результаты ЕГЭ по математике, были рассмотрены показатели 162 образовательных организаций региона с более чем 10 участниками.

В список школ с наиболее высокими результатами вошли 10 ОО, что составляет около 6 % из 162 организаций. Только в 4 из этих ОО ненулевое количество участников, не достигших минимального балла, и составляет 2–3 % (в реальности это по одному участнику в каждом из этих ОО). Фактически данный список в последние годы не меняется. Все 10 ОО стабильно на протяжении нескольких последних лет показывают наиболее высокие результаты ЕГЭ по математике профильного уровня среди ОО в Иркутской области. И опять-таки на фоне изменения шкалы перевода баллов из первичных в стобалльную в 2024 году доля выпускников, получивших тестовый балл выше 80, в ОО с наиболее высокими результатами увеличилась в разы по сравнению с кампаниями 2022 и 2023 гг.

В перечень ОО, показавших низкие результаты в 2024 году, включены 12 организаций, что составляет около 7 % от 162 ОО с количеством участников более 10 человек. Доля участников, не достигших минимального балла, в этих ОО составила от 25 до 39 %. Однако и количество участников в этих ОО минимальное и составляет от 11 до 23 человек. То есть каждый участник составляет 4–10 % от всех участников данной ОО.

Как правило, список школ с низкими показателями меняется из года в год очень значительно. Это связано в том числе с небольшим количеством (около 10) участников в большинстве из таких школ – то менее 10, то более. А также вес одного участника в этих случаях довольно большой, поэтому могут быть значительные вариации из года в год всех показателей.

Однако есть и постоянные «участники» в перечне школ с наиболее низким показателями: к ним относятся МБОУ г. Иркутска СОШ № 7 и МБОУ г. Иркутска СОШ № 10.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что в 2024 году по сравнению с двумя предыдущими периодами (2022, 2023 гг.) ЕГЭ по математике профильного уровня выпускники сдали гораздо лучше. Но на наш взгляд, в основном это за счет изменения шкалы перевода баллов, а не за счет поднятия уровня обученности участников экзамена.

Раздел 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КИМ

3.1. Краткая характеристика КИМ по учебному предмету

В содержании КИМ-2024 по сравнению с КИМ-2023 произошли следующие изменения: в первую часть КИМ включено задание по геометрии (задание 2), проверяющее умения определять координаты точки, вектора, производить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами. Максимальный первичный балл за выполнение работы увеличен с 31 до 32 баллов.

В структуре первой части КИМ, как и в прошлом году, сохранилось разбиение на тематические блоки. Работа начинается с заданий по геометрии, затем следует блок заданий по элементам комбинаторики, статистике и теории вероятностей, а затем идут задания по алгебре и началам математического анализа.

Содержательные особенности КИМ	
Часть 1	
Формулировки (сюжеты) заданий части 1 соответствуют демонстрационному варианту КИМ ЕГЭ по профильной математике 2024 года. В сравнении с 2023 годом принципиальных содержательных различий (кроме введения геометрической задачи на тему «Векторы» в части 1 2024 года нет.	
Часть 2	
№ 13	Задание проще, чем аналогичное в прошлом году. Вместо кубического уравнения получается квадратное, но при этом применяются формулы приведения. Процент выполнения повысился с 30,2 до 35,5.
№ 14	Первая часть задачи стала совсем простой, но усложнился пункт б). Процент выполнения стал выше: 2,3 вместо 1,2. Это задание имеет один из самых низких процентов выполнения.
№ 15	В этом году задание содержало показательное неравенство вместо логарифмического, как в прошлом году, что привело к резкому росту процента выполнения с 8,4 до 21,1 (в 2022 году также было показательное неравенство с процентом выполнения 21,5). То есть с логарифмами учащиеся «дружат» гораздо меньше.
№ 16	Математическая модель задания № 16 в сравнении с соответствующим заданием 2023 года значительно упростилась. КИМ содержал классическую задачу с постоянными платежами. Поэтому процент выполнения резко увеличился (с 6,1 до 19,4, т. е. в 3 раза). Проблемы вызвали вычисления, носящие громоздкий характер.
№ 17	Задачи по геометрии традиционно относятся к наиболее сложной части экзамена. Но в этом году решение задачи № 17 стало доступнее, чем в прошлом. Сложная психологически (вписанный в окружность пятиугольник), технически она решалась гораздо проще. Поэтому процент выполнения повысился с 0,8 до 4,6.

№ 18	Задача существенно сложнее задачи прошлого года, необходимо было рассмотреть расположение фигуры, состоящей из частей двух гипербол, и прямой, что понизило процент выполнения с 2,8 до 1,1. Это самая сложная задача нынешнего варианта.
№ 19	Традиционно пункт а) в задании № 19 имеет положительный ответ, для обоснования которого требуется построить пример, удовлетворяющий условию задачи. С этим пунктом нередко справляются даже те обучающиеся, которые не обладают особыми техническими навыками и знаниями. Кроме того, много успешных попыток было и в решении пункта б). Традиционные проблемы сохранились в пункте в), где необходимо было сделать оценку и привести пример, подтверждающий точность оценки. Процент выполнения мало изменился: с 12,3 повысился до 14,4. При этом стоит отметить, что в одном из вариантов условие было значительно проще, чем в остальных.

Указанные содержательные особенности заданий КИМ-2024 следующим образом сказались на статистике выполнения заданий. Было усложнено задание высокого уровня сложности (№ 18), с которыми, как правило, обучающиеся, приступающие к выполнению заданий части 2 с развернутым ответом, и так справлялись с трудом. Результаты снизились во всех категориях: до 60 т. б. с 0,1 % до 0 %, 61–80 т. б. с 4,0 % до 0,3 %, 81–100 т. б. с 68,1 % до 8,7 %.

В задании № 19 во всех категориях процент выполнения остался примерно на том же уровне. В остальных заданиях процент выполнения практически во всех категориях повысился.

Все задания одной линии с развернутым ответом в 2024 году в разных вариантах отличались лишь числовыми данными (за исключением одного варианта задачи № 16 (более сложные вычисления) и одного варианта задачи № 19 (более простое условие), которые не влияли на ход решения. Поэтому такие различия не повлияли на результат в целом.

3.2. Анализ выполнения заданий КИМ

3.2.1. Статистический анализ выполнения заданий КИМ в 2024 году

Основные статистические характеристики выполнения заданий КИМ в 2024 году

Таблица 10

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[3] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т. б.	в группе от 61 до 80 т. б.	в группе от 81 до 100 т. б.
1	Умение оперировать понятиями: плоский угол, площадь фигуры, подобные фигуры; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь), используя изученные формулы и методы	Б	71,0	20,9	64,6	89,0	97,8
2	Умение оперировать понятиями: вектор, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение, угол между векторами	Б	76,6	22,2	72,0	95,6	99,3

[3] Вычисляется по формуле $p = \frac{N}{n m} \cdot 100\%$, где N – сумма первичных баллов, полученных всеми участниками группы за выполнение задания, n – количество участников в группе, m – максимальный первичный балл за задание.

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[3] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т. б.	в группе от 61 до 80 т. б.	в группе от 81 до 100 т. б.
3	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, величина угла, плоский угол, двугранный угол, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, объем фигуры, площадь поверхности; умение использовать геометрические отношения при решении задач; умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии	Б	82,2	34,1	80,6	96,8	99,9
4	Умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность	Б	95,0	73,8	96,7	99,3	99,9
5	Умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, комбинаторные факты и формулы	П	48,6	9,1	35,2	67,1	87,4
6	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов	Б	96,6	80,4	98,4	99,4	100

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[3] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т. б.	в группе от 61 до 80 т. б.	в группе от 81 до 100 т. б.
7	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений	Б	56,8	8,0	38,5	85,0	95,9
8	Умение оперировать понятиями: функция, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке, производная функции, первообразная; находить уравнение касательной к графику функции; умение находить производные элементарных функций; умение использовать производную для исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций; находить площади фигур с помощью интеграла	Б	44,5	6,3	26,9	66,4	87,7
9	Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов	П	59,1	6,5	46,7	82,9	92,9
10	Умение решать текстовые задачи разных типов, составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов	П	63,3	6,8	51,6	87,7	98,5
11	Умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения уравнений	П	70,4	9,4	59,7	97,0	99,6

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[3] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т. б.	в группе от 61 до 80 т. б.	в группе от 81 до 100 т. б.
12	Умение оперировать понятиями: экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение находить производные элементарных функций; умение использовать производную для исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций	П	52,5	4,5	35,7	78,1	93,0
13	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов	П	35,5	0,1	5,8	64,9	96,6
14	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, отрезок, луч, величина угла, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; площадь фигуры, объем фигуры, многогранник, поверхность вращения, площадь поверхности, сечение; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения; использовать геометрические отношения при решении задач; находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объём, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии	П	2,3	0	0,2	1,2	15,6

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[3] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т. б.	в группе от 61 до 80 т. б.	в группе от 81 до 100 т. б.
15	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов	П	21,1	0	1,1	30,0	92,2
16	Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; умение решать текстовые задачи разных типов, в том числе задачи из области управления личными и семейными финансами	П	19,4	0	1,7	26,5	85,1
17	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, отрезок, луч, величина угла; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии, использовать геометрические отношения при решении задач; умение находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь), используя изученные формулы и методы	П	4,6	0,0	0,4	2,2	31,7
18	Умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами	В	1,1	0	0	0,3	8,7

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Иркутской области[3] в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т. б.	в группе от 61 до 80 т. б.	в группе от 81 до 100 т. б.
19	Владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение приводить примеры и контрпримеры, проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений; умение оперировать понятиями: множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел, остаток по модулю; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное; умение выбирать подходящий метод для решения задачи	В	14,4	2,5	8,5	17,4	40,9

Выявление сложных для участников ЕГЭ заданий

Из 12 заданий первой части только с двумя заданиями справилось менее 50 % участников. Это задания № 5 (48,6 %) и № 8 (44,5 %).

Из семи заданий второй части менее чем 15 % участников решены геометрические задания (№ 14 – 2,3 %, № 17 – 4,6 %), задача с параметрами (№ 18 – 1,1 %) и задача № 19 – 14,4 %.

Анализ выполнения заданий КИМ по группам участников ЕГЭ
с разными уровнями подготовки

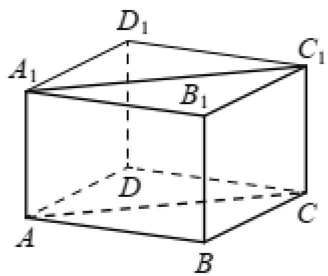
Группа участников, не достигших минимального балла	Группа участников с результатами от минимального до	Группа участников с результатами от 61 т. б. до 80 т. б.	Группа участников с результатами от 81 т. б. до 100 т. б.

	60 т. б.		
Относительно успешно справились только с заданием № 4 (базовый уровень – вероятность) – 73,8 % и задание № 6 (базовый уровень – решение уравнения) – 80,4 %. Все остальные показатели по заданиям базового уровня ниже 40 %. По всем заданиям второй части у данной категории участников 0 % выполнения. Исключение составляет задание № 13 (0,1 %) и № 19 (2,5 %) Это обусловлено тем, что на пункт а) задания №19 ответ был «да», и достаточно было привести подходящий пример.	Эта категория школьников не справилась с заданиями базового уровня части 1 (№ 7, преобразование тригонометрического выражения – 38,5 %, № 8, исследование графика – 26,9 %), а также со всеми заданиями части 2 с развернутыми ответами.	Успешно справились с заданиями части 1. В части 2 эта группа школьников не справилась с геометрическими заданиями (№ 14 – 1,2 %, № 17 – 2,2 %). То, что с геометрическими заданиями второй части столь плохо справились даже представители этой категории (с довольно хорошими результатами), еще раз свидетельствует о плохо сформированных в целом геометрических знаниях. Низкие результаты у этой группы также и в задаче с параметром № 18 (0,3 %) В прошлом году такая задача поддалась 4 % выпускников. Изменение среднего процента выполнения этих заданий связано именно с этой категорией школьников. Первые две категории эти задания не делают почти никогда, последняя – почти всегда. Поэтому небольшое упрощение или усложнение их математической фабулы сказывается в основном на обучающихся среднего уровня с 61–80 т. б.	Успешно справились со всеми заданиями части 1. В части 2 самыми трудными оказались задания № 14 (стереометрия) и № 17 (планиметрия). Процент выполнения по заданию № 14 снизился в 2 раза: № 14 (15,6 %, а было 29,9 %). Процент выполнения по заданию № 17, немного повысился (31,7 %, было 25,9 %). Сильно снизился процент решивших задачу с параметрами № 18 (8,7 %, было 68,1 %), что объясняется более высокой сложностью задания.

3.2.2. Содержательный анализ выполнения заданий КИМ

Пример задания № 1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 62°, угол CAD равен 41°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 103. Наиболее распространенные неверные ответы – 77 (угол ADC, 3 %) и 41 (углы CBD и CAD, 2,5 %). Результаты получены либо из-за невнимательности, либо из-за незнания свойств вписанных углов.

Пример задания № 2. Даны векторы $\vec{a}(31; 0)$ и $\vec{b}(1; -1)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - 24\vec{b}$.
Ответ: 25. Наиболее распространенный неверный ответ 31 (7 %) – длина вектора $\vec{a}$.



Пример задания № 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 8$, $BC = 7$, $AA_1 = 6$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1.
Ответ: 168. Наиболее распространенный ответ – 336 (3 %), объем исходного параллелепипеда.

Пример задания № 4. В сборнике билетов по химии 30 билетов, в девяти из них встречается вопрос по теме «Щелочи». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос по теме «Щелочи».
Ответ: 0,7. Наиболее распространенный неверный ответ – 0,3 (3 %), вероятность противоположного события. Можно объяснить невнимательностью при прочтении задачи.

Пример задания № 5. Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,7. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.
Ответ: 0,657. Наиболее распространенный неверный ответ – 0,147 (10 %), вероятность того, что две лампы перегорят, а одна – нет. Это только один из возможных вариантов.

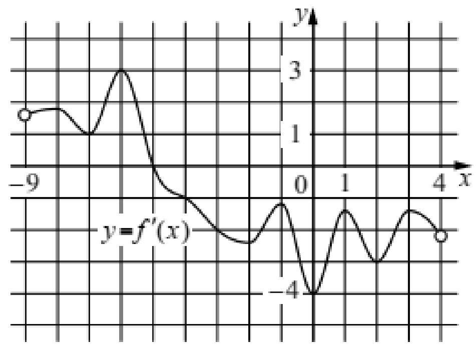
Наиболее вероятными причинами неверного ответа является несформированность следующих умений:
– умения моделировать реальную ситуацию на языке теории вероятностей;
– умения осуществлять полный перебор вариантов событий;

– умения вычислять вероятность противоположного случайного события;
– вычислительных умений.

Пример задания № 6. Найдите корень уравнения $\sqrt{8x-20}=2$.
Ответ: 3. Незначительное число неверных ответов.

Пример задания № 7. Найдите значение выражения $4\sqrt{3}\cos^2\frac{23\pi}{12}-4\sqrt{3}\sin^2\frac{23\pi}{12}$.
Ответ: 6. Самый распространенный неправильный ответ – 1 (8 %) (видимо, обучающиеся увидели что-то похожее на основное тригонометрическое тождество) и 6 (4,5 %) (ошибка на этапе вычисления знака значения косинуса двойного угла)
Наиболее вероятными причинами неверного ответа является несформированность следующих умений:
– умения распознавать и применять формулу косинуса двойного аргумента;
– умения определять знак числа в процессе применения формулы приведения;
– умения вычислять значение косинуса аргумента, выраженного в долях числа π.

Пример задания № 8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале (– 9; 4). В какой точке отрезка [– 2; 3] функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: 3. Самый распространенный неправильный ответ – 0 (23 %), получающийся, если перепутать производную с функцией.

Наиболее вероятными причинами неверного ответа можно предполагать:
– отсутствие навыков работы с графиком производной функции;
– несформированность умения определять наименьшее значение функции по графику ее производной.
Пример задания № 9. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью v_0 = 70 км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением a = 16 км/ч^2. Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $S = v_0t+\frac{at^2}{2}$, где t – время в часах, прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 123 км. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 90. Самый распространенный неправильный ответ – 1,5 (12 %), получается, если ответ записать в часах. Ошибка, приведшая учащихся к неправильному ответу, указывала на невнимательность к тому, в каких единицах требуется записать ответ.

Наиболее вероятными причинами неверных ответов являются:

– невнимательность при прочтении условия задачи;

– несформированность умения работать с формулой как математической моделью реальной ситуации;

– вычислительные ошибки.

Пример задания № 10. Один мастер может выполнить заказ за 40 часов, а другой – за 24 часа. За сколько часов выполнят этот заказ оба мастера, работая вместе?

Ответ: 15. Самый распространенный неправильный ответ – 32 (14 %), среднее арифметическое чисел из условия, что показывает непонимание условия или неумение решать задачи на совместную деятельность.

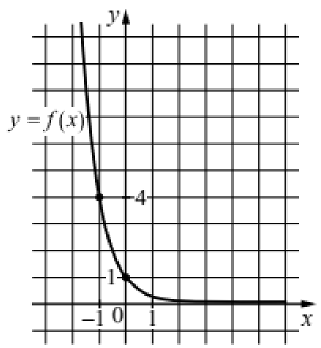
Наиболее вероятными причинами неверного ответа можно предполагать:

– несформированность умений вычислять совместную производительность путем введения условной единицы при арифметическом методе решения задачи;

– неверная интерпретация условия задачи;

– вычислительные ошибки.

Пример задания № 11. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-2)$.



Ответ: 16. Среди наиболее частых неправильных ответов – 1, 2 и 4 (каждый по 2,5 %). Складывается впечатление об их произвольности, т. е. использовании чисел из условия.

Пример задания № 12. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 2) - 5x + 13$.

Ответ: 2,2. Наиболее распространенный неправильный ответ – 2 (7,5 %). Очевидно непонимание свойств логарифмической функции.

Наиболее вероятными причинами неверного ответа можно предполагать:

– отсутствие знаний свойств логарифмов (в том числе знаний об области определения логарифмической функции);

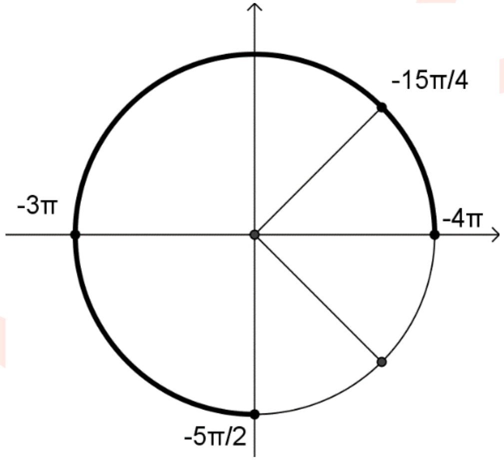
– отсутствие умений и навыков нахождения точки максимума функции.

Рассмотрим далее более подробно задания второй части ЕГЭ-2024 нашего региона (из открытого варианта). Выделим типичные ошибки выпускников по каждому из заданий 13–19, и приведем примеры решений некоторых выпускников нашего региона.

Задание № 13.

а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x+\pi) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.



Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x \cdot \cos x + \sqrt{2}(-\sin x) = 0.$$
$$2\sin x \cdot \cos x - \sqrt{2}\sin x = 0.$$
$$\sin x\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0.$$

Значит, $\sin x - 0$, откуда $x - \pi k$, $k \in Z$, или $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$, или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа: 4π; 3π и $-4\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{15\pi}{4}$.

Ответ: а) $x - \pi k$, $k \in Z$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$.

б) -4π; -4π и $-\frac{15\pi}{4}$.

Типичные ошибки

1) Ошибки в формулах приведения.

2) Ошибки в формулах решения простейших тригонометрических уравнений.

3) Ошибки в отборе корней.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 1)

№ 13

а) $\sin 2x + \sqrt{3}\sin(x - \pi) = 0$ б) $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$

$2\sin x \cdot \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$

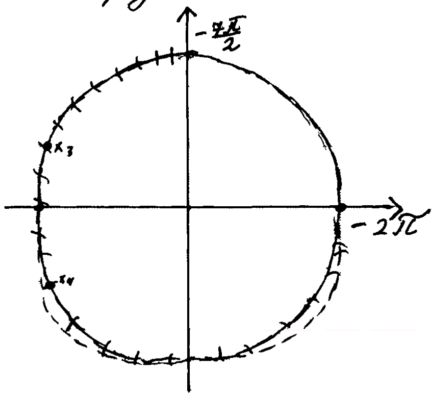
$\sin x\,(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$

$\sin x = 0$ $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

$x = \pi n;\ n \in Z$ $\cancel{2}\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z$

б) Отберем корни с помощью тригонометрической окружности на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$



$x_1 = -\pi$

$x_2 = -2\pi$

$x_3 = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{6\pi - \pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$

$x_4 = -\pi - \frac{5\pi}{6} = -\frac{6\pi - 5\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z;\ \pi n;\ n \in Z$; б) $-\pi;\ -2\pi;\ -\frac{7\pi}{6};\ -\frac{11\pi}{6}$

Сделана ошибка в формуле приведения. Это не вычислительная ошибка.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 2)

№ 13

а) $\sin 2x + \sqrt{3}\sin(x-\pi) = 0$

$2\cdot\sin x\cdot\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

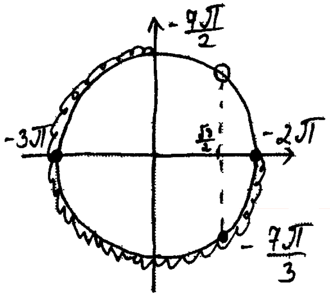
$\sin x\,(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$

$\sin x = 0$ или $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

$x = \pi n, n\in Z$ $\quad\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\in Z$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, которые $\in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$



$\pi\cdot(-2) = -2\pi$

$\pi\cdot(-3) = -3\pi$

$-\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$

Ответ: а) $\pi n, n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\in Z$

б) -3π; $-\frac{7\pi}{3}$; -2π

Ошибка в решении простейшего тригонометрического уравнения

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 3)

---

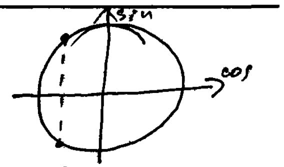
13) $\sin 2x + \sqrt{2}\,\sin(x+\pi) = 0$

$\sin 2x - \sqrt{2}\,\sin(\pi + x) = 0$

$\sin 2x + \sqrt{2}\,\sin x = 0$

$2\sin x \cdot \cos x + \sqrt{2}\,\sin x = 0$

$\sin x\,(2\cos x + \sqrt{2}) = 0$



$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cos x + \sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cos x = -\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$ а) $\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in Z \\ x = \pm\frac{4\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$

б) Укажем корни этого ~~отрезка~~ уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Отметим данный отрезок и найденные серии решений ~~на единичной окружности~~. при помощи системы:

$-4\pi < -\frac{4\pi}{6} < -\frac{5\pi}{2}$

$-\frac{24\pi}{6} < -\frac{4\pi}{6} < -\frac{15\pi}{6}$

Ошибка в применении формулы приведения. Отбор корней не завершен.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 4)

13. а) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x+\pi) = 0$

$2\sin x \cdot \cos x - \sqrt{2}\sin x = 0$

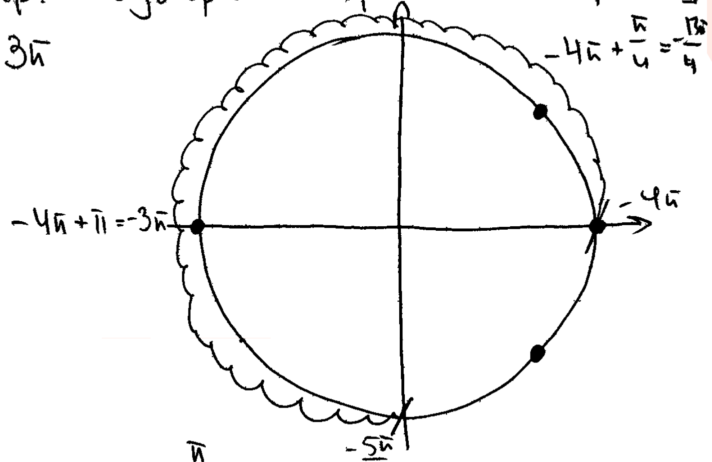
$\sin x\,(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$

$\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pi n,\ n \in Z$ $\qquad$ $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

б) С помощью числ. окр. подберем корни $\in \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Нам подойдут: $-4\pi;\ -\frac{13\pi}{4};\ -3\pi$



Ответ: а) $x = \pi n,\ n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

б) $-4\pi;\ -\frac{13\pi}{4}$; -3π

Вычислительная ошибка при отборе корней.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 5)

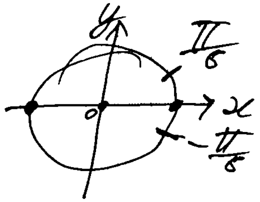
№13 а) $\sin 2x+\sqrt{3}\sin(x-\pi)=0$

$\sin 2x-\sqrt{3}\sin x=0$

$2\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$

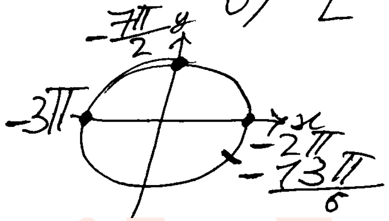
$\sin x(2\cos x-\sqrt{3})=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ 2\cos x-\sqrt{3}=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.;$



$\left[\begin{array}{l}x=\pi k;\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z\\ x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z\end{array}\right.$

б) $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$



$-2\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{13\pi}{6}$

Ответ: $-3\pi;-2\pi;-\frac{13\pi}{6}$

При отборе корней не отмечена дуга, тем самым отбор не произведен, не выполнены минимальные требования для получения 2 баллов.
Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 6)

(13) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(\pi + x) = 0$

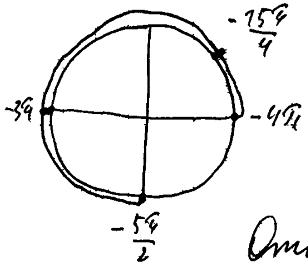
$\sin 2x - \sqrt{2}\sin x = 0$

$2\sin x\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0$

$\sin x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$

$\sin x = 0$ $\qquad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pi k,\ k \in Z$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\qquad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$



$x = \pi k$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$k_1 = -3$ $\quad k_2 = -4$ $\qquad k_3 = -2$

$x_1 = -3\pi$ $\quad x_2 = -4\pi$ $\qquad x_3 = \frac{\pi}{4} - 4\pi = -\frac{15\pi}{4}$

Ответ: а) $x \in \{\pi k;\ \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k\},\ k \in Z$

б) $x \in \{-3\pi;\ -4\pi;\ -\frac{15\pi}{4}\}$

Все шаги решения выполнены, произведен отбор корней на окружности, получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 13 (ПРИМЕР 7)

№13. а) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x+\pi) = 0$

ОДЗ: $x \in R$

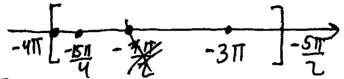
$2\sin x\cos x + \sqrt{2}(-\sin x) = 0$

$2\sin x\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0$

$\sin x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \pi k, k \in Z\\ x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z\end{array}\right.$

б)



1. Рассмотрим $x = \pi k, k \in Z$:
   при $k \geq 0$, $x \notin [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$
   при $k = -1$, $k = -2$, $x \notin [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$
   при $k = -3$, $x = -3\pi$ – подходит.
   при $k = -4$, $x = -4\pi$ – подходит.
   при $k = -5$, $x = -5\pi \notin [-4; -\frac{5\pi}{2}]$

2. Рассмотрим $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$
   при $k = -1$, $x = -\frac{7\pi}{2}$ – подходит.
   при $k = -2$, $x = -\frac{15\pi}{2} \notin [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$

3. Рассмотрим $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$
   при $k = -1$, $x = -\frac{9\pi}{2} \notin [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$

Ответ: а) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; πk, $k \in Z$
б) $x = -4\pi; -\frac{7\pi}{2}; -3\pi$.

2. Рассмотрим $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$
   при $k = -1$: $x = -\frac{7\pi}{4} \notin [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$
   при $k = -2$: $x = -\frac{15\pi}{4}$ – подходит
   при $k = -3$: $x \notin [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$

3. Рассмотрим $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$
   при $k = -1$: $x = -\frac{9\pi}{4} \notin [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$
   при $k = -2$: $x = -\frac{17\pi}{4} \notin [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$

Ответ: а) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; πk, $k \in Z$
б) $x = -4\pi; -\frac{15\pi}{4}; -3\pi$.

Все шаги решения выполнены, произведен отбор корней на прямой, получен верный ответ.

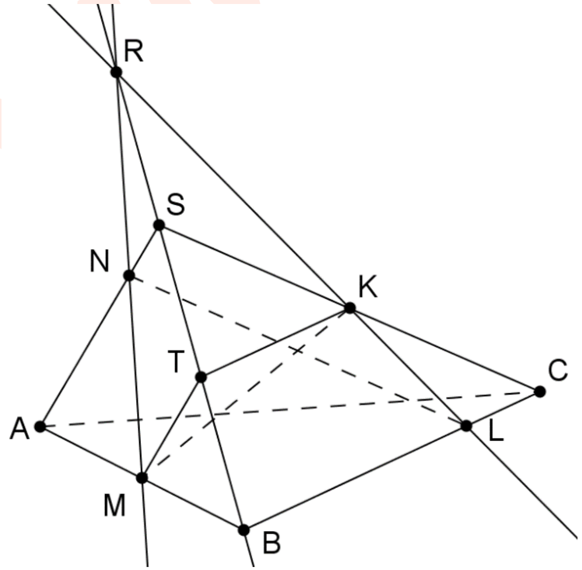
Оценка эксперта: 2 балла.

Задание № 14.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и K – середины ребер AB и SC соответственно. На продолжении ребра SB за точку S отмечена точка R. Прямые RM и RK пересекают ребра AS и BC в точках N и L соответственно, причем $BL = 3LC$.

а) Докажите, что отрезки MK и NL пересекаются. б) Найдите отношение $AN : NS$.

Решение



а) Точки M и N лежат на прямой RM, а точки K и L лежат на прямой RK. Следовательно, $MNKL$ – выпуклый четырехугольник, лежащий в плоскости RMK, поскольку точка N лежит на отрезке RM, а точка K лежит на отрезке RL. Отрезки MK и NL являются диагоналями этого четырехугольника. Значит, они пересекаются.

б) **Первое решение.** Обозначим середину ребра SB через T. Тогда MT является средней линией треугольника ABS, а TK является средней линией треугольника BSC. Значит, $MT = \frac{1}{2}AS$, $TK = \frac{1}{2}BC$. По условию $BL = \frac{3}{4}BC$. Треугольники BRL и TRK подобны с коэффициентом подобия $\frac{TK}{BL} = \frac{BC}{2} : \frac{3BC}{4} = \frac{2}{3}$. Следовательно, $BT = \frac{1}{2}TR$, откуда, учитывая, что $ST = BT$, получаем $SR = BT$. Треугольники MRT и NRS подобны с коэффициентом подобия

$\frac{RS}{RT} = BT : 2BT = \frac{1}{2}$. Следовательно, $NS = \frac{1}{2}MT = \frac{1}{4}AS$, откуда $AN : NS = 3 : 1$.

Второе решение. Применим теорему Менелая к треугольнику BSC и прямой RK. Получаем

$\frac{CK}{KS} \cdot \frac{SR}{BR} \cdot \frac{BL}{LC} = 1$. Так как K – середина ребра SC, $BL = 3LC$, то $\frac{SR}{BR} = \frac{1}{3}$.

Применим теорему Менелая к треугольнику ABS и прямой RM. Получаем $\frac{AN}{NS} \cdot \frac{SR}{BR} \cdot \frac{BM}{AM} = 1$. Так как M – середина ребра AB, $\frac{SR}{BR} = \frac{1}{3}$, то $AN : NS = 3 : 1$.

1) Ошибки в доказательстве принадлежности отрезков одной плоскости.
2) Ошибки в доказательстве подобии треугольников.
3) Ошибки в вычислениях.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 8)

№14|

Дано: $SABC$ – прав. пирамида

$AM=BM$; $SK=CK$; $R\in SB$

$RM\cap AS=N$; $RK\cap BC=L$;

$\frac{BL}{LC}=3$; а) Д-ть: $MK\cap NL$

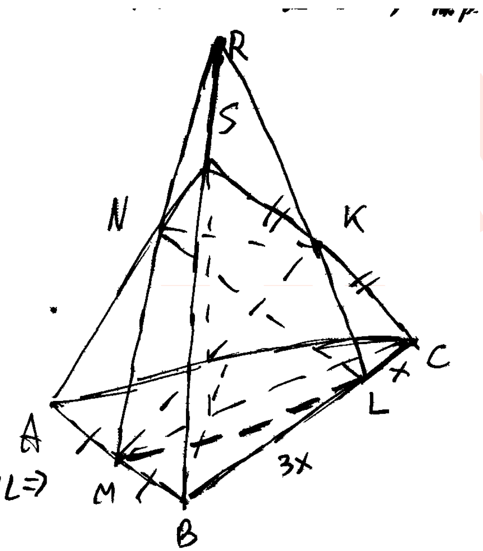
б) Н-и: $\frac{AN}{NS}$

а) Построим сеч. $MNKL$!

Пров. NK и ML; $NK\in(SAC)$; $ML\in(ABC)$ =>

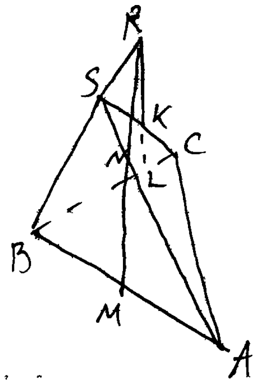
=> $MNKL$ – четырехуг с диагоналями MK и NL =>

=> $MK\cap NL$ ч.т.д.



В решении не доказано, что отрезки лежат в одной плоскости. Пункт б) в решении отсутствует.
Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 9)



№16

а) Рассмотрим (BMR) и (BLR)

Эти пл-ти имеют общую прямую BR,

то есть (BMR) пересек. (BLR) = BR

т.к. $N \in MR$, $K \in RL$, M и L лежат в (ABC),

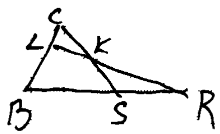
поэтому проведем ML

Получим, что точки R, N, K, M, L лежат в одной пл-ти

(MRL) и т.к. $M, N \in MR$, а $L, K \in RL$, а $MR \cap RL = R$, то

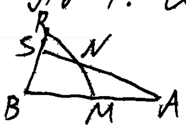
прямые MK и NL будут пересекаться ч.т.д

б) По т. Чевы



$\frac{LK}{KR} = \frac{RS}{BS} = \frac{LC}{BL} = \frac{x}{3x} \Rightarrow$

По т. Чевы



$\frac{SN}{NA} = \frac{MA}{BM} = \frac{SR}{BS} = \frac{x}{3x}$

Значит $\frac{SN}{NA} = \frac{x}{3x} \Rightarrow AN : NS = 3:1$

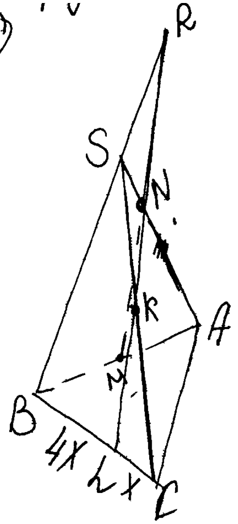
Ответ: б) 3:1

В решении не доказано, что отрезки лежат в одной плоскости. В пункте б) попытка применить теорему Менелая под названием теорема Чевы, причем в неверной формулировке. Тем не менее ответ получается верный.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 10)

14



а) Доказательство:

1. Рассмотрим (SBA). $M, N \in (SBA)$ (т.к. $\in AB$ и AS, AB и $AS \in (SBA)$)

2. Рассмотрим (SBC). $K, L \in (SBC)$ (т.к. $\in SC$ и BC, SC и $BC \in (SBC)$)

3. Рассмотрим (SAC). $N, K \in (SAC)$ (т.к. $\in SA$ и SC, SA и $SC \in (SAC)$)

4. Рассмотрим (ABC). $M, L \in (ABC)$ (т.к. $\in AB$ и BC, а AB и $BC \in (ABC)$)

5. Можно соед. точки последовательно, т.к. каждая пара принадлежит одной плоскости. $\Rightarrow NKLM$ – плоскость. MK и $NL \in (MLKN) \Rightarrow$ $MK \cap NL$ (также можно сказать, что через две пересек. прямые можно провести плоскость, а т.к. $NKLM$ – плоскость $\Rightarrow MK \cap NL$)

ЧТД

б) Решение:

1. Рассмотрим $\triangle SCB$ и прямую RL

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CK}{KS} \cdot \frac{SR}{RB} = 1 \Rightarrow \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{SR}{RB} = 1 \Rightarrow \frac{SR}{RB} = \frac{1}{4}$$

(по т. Менелая)

2. Рассмотрим $\triangle SAB$ и прямую RM

$$\frac{SR}{RB}\cdot\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AN}{NS}=1 \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{AN}{NS}=1 \Rightarrow \frac{AN}{NS}=\frac{4}{1}$$

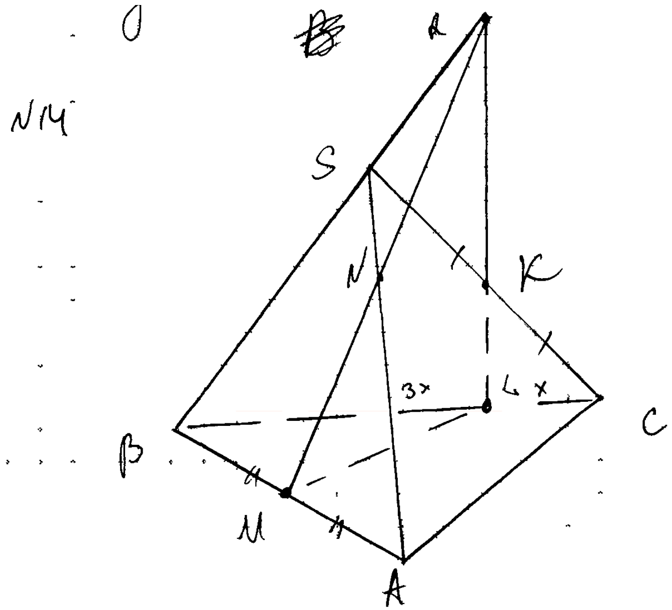
(по т. Менелая)

Ответ: 4:1

В решении не доказано, что отрезки лежат в одной плоскости. Пункт б) решен по теореме Менелая независимо от пункта а).

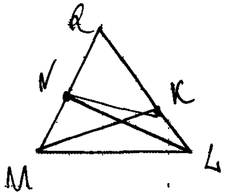
Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 11)



6

а) Построение: продлим BS за S, получим точку R, $R \in (ABS)$ и $R \in (BSC)$ т.к. $R \in BS$; соединим RM и RL, $RM \cap AB = M$; $RL \cap SC = K$. Рассмотрим (RML):



N, K лежат в этой плоскости, т.к. $N \in RM$, $K \in RL$; MK и NL пересекаются, т.к. лежат в $\triangle RML$, $N \in MR$; $K \in RL$, б) $AN : NS$ – ?

По т. Менелая для $\triangle CSB$ и секущей RL:

$$\frac{CK}{KS}\cdot\frac{SR}{RB}\cdot\frac{BL}{LC}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{1}\cdot\frac{SR}{RB}\cdot\frac{3}{1}=1 \Leftrightarrow \frac{SR}{RB}=\frac{1}{3}$$

По т. Менелая для $\triangle ASB$ и секущей RM:

$$\frac{AN}{NS}\cdot\frac{SR}{RB}\cdot\frac{BM}{MA}=1 \Leftrightarrow \frac{AN}{NS}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=1 \Leftrightarrow \frac{AN}{NS}=\frac{3}{1}$$

Ответ: б) 3:1

Задача решена полностью. Пункт б) решен по теореме Менелая.

Оценка эксперта: 3 балла.

ЗАДАНИЕ № 14 (ПРИМЕР 12)

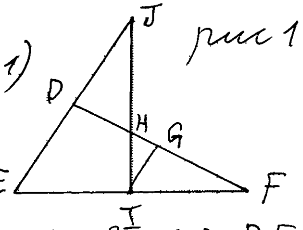
14. Дано:

$SABC$ – правильная треугольная призма с основанием ABC. M – середина AB. K – середина SC.

$S \in RB$, $N = RM \cap AS$, $L = RK \cap BC$.

$BL = 4LC$. Доказать: $MK \cap NL$. Найти $\frac{AN}{NS}$

Лемма. $\frac{JD}{JE}\cdot\frac{EI}{IF}\cdot\frac{FH}{HD}=1$ (рис 1)



1) $\triangle DEF \sim \triangle GIF$ ($GI \parallel DE$):

$\angle FDE = \angle FGI$ (соответственные при параллельных прямых DE и GI, секущей DF), $\angle F$ общий $\Rightarrow$

$\cancel{\frac{EI}{IF}=\frac{DG}{GF}\ (DF\cdot GI = DE\cdot}$

$$\frac{EF}{IF}=\frac{DF}{GF}\Big|-1 \qquad \frac{IF+IE}{IF}-1=\frac{DG+GF}{GF}-1$$

$$\frac{IE}{IF}=\frac{DG}{GF}.$$

2) $\triangle JDH \sim \triangle IGH$: $\angle IGH = \angle JDH$ (накрест лежащие при параллельных прямых GI и DJ, секущей DG), $\angle DHJ = \angle GHI$ (вертикальные) $\Rightarrow$

$$DJ = DH\,\frac{GI}{HG}.$$

3) $\triangle DEF \sim \triangle GIF$ (выше) $\Rightarrow$

$$DE = GI\cdot\frac{DF}{GF} \Rightarrow \frac{JD}{JE}=\frac{JD}{JD+DE}=$$

$$=\frac{DH\cdot\frac{GI}{HG}}{DH\cdot\frac{GI}{HG}+\frac{DF}{GF}\cdot GI}=\frac{DH/HG}{DH/HG+DF/GF}=$$

$$= \frac{DH \cdot GF}{DH\,GF + DF \cdot HG} = \frac{DH \cdot GF}{DH \cdot GF + DH \cdot HG + HG \cdot HG + GF \cdot HG} =$$

$$= \frac{DH \cdot GF}{(DH+HG)\cdot(HG+GF)} = \frac{DH \cdot GF}{DG \cdot HF}$$

4)
$$\frac{JD}{JE} \cdot \frac{EI}{IF} \cdot \frac{FH}{HD} = \frac{DH\,GF}{DG \cdot HF} \cdot \frac{DG}{GF} \cdot \frac{FH}{HD} = 1$$

чтд.

Доказательство.

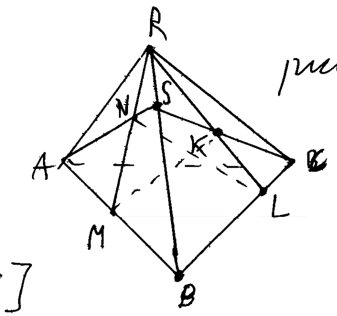


рис 2.

1) $N \in AS$, $N \in RM \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} N \in \triangle RAB \\ N \in MR \end{array}\right\} N \in [MR]$

2) $\left.\begin{array}{l} L \in RK \subset \angle BRC \\ L \in BC \end{array}\right\} L \in [BC] \subset \triangle RBC.$

$\left.\begin{array}{l} K \in RL \\ K \in [SC] \end{array}\right\} K \in [RL]$

3) рассмотрим (RNK). $R, N, K \in (RNK) \Rightarrow RN \subset (RNK)$, $RK \subset (RNK) \Rightarrow M, L \in (RNK) \Rightarrow NL, KM \in (RNK)$.
$N \in [RM] \Rightarrow N$ и R с одной полуплоскости от прямой KM. $K \in [LR] \Rightarrow L$ и R в разных полуплоскостях от

прямой KM, а значит L и N - в разных полуплоскостях от прямой MK, поэтому LN ∩ MK. чтд.

Решение.

по лемме $\frac{RB}{RS} = \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AN}{NS} = \frac{1}{1} \cdot x = x$

по лемме

$\frac{RB}{RS} \cdot \frac{SK}{KC} \cdot \frac{CL}{LB} = x \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x = 4$

Ответ: $\frac{AN}{NS} = 4$

Задача решена полностью. Пункт б) решен через дополнительное построение и подобие треугольников.

Оценка эксперта: 3 балла.

Задание № 15.

Решите неравенство

$$\frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 4}{2^x \quad 5} + \frac{3 \cdot 2^{x+1} - 46}{2^x \quad 8} \le 2^x + 5.$$

Решение

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 46}{t - 8} < t + 5,$$

$$\frac{(t-1)(t-5)}{t-5} - \frac{1}{t-5} + \frac{6(t-8)}{t-8} + \frac{2}{t-8} \le t + 5,$$

$$-\frac{1}{t \quad 5} + \frac{2}{t \quad 8} \le 0,$$

$$\frac{t-2}{(t-5)(t-8)} \le 0,$$

откуда $t \le 2$, $5 < t < 8$.

При $t \le 2$ получим: $2^x \le 2$, откуда $x \le 1$.

При $5 < t < 8$ получим: $5 < 2^x < 8$, откуда $\log_2 5 < x < 3$.

Ответ: $x \le 1$, $\log_2 5 < x < 3$.

Типичные ошибки

1) Неверная расстановка знаков при применении метода интервалов.
2) Отбрасывание знаменателя без учета его знака.
3) Ошибки в знаках при приведении к общему знаменателю.
4) Вычислительные ошибки.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 13)

№15

ОДЗ
$2^x \ne 5$
$2^x \ne 8$
$2^x > 0;\ t > 0$

$$\frac{4^x - 3\cdot 2^{x+1} + 4}{2^x - 5} + \frac{3\cdot 2^{x+1} - 46}{2^x - 8} \le 2^x + 5.$$

$$\frac{2^{2x} - 3\cdot 2^x\cdot 2 + 4}{2^x - 5} + \frac{3\cdot 2^x\cdot 2 - 46}{2^x - 8} \le 2^x + 5$$

Пусть $2^x = t$, тогда:

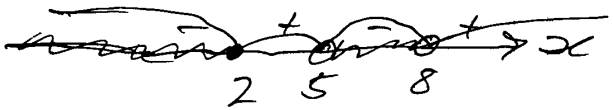
$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 46}{t - 8} \le t + 5$$

$$\frac{(t^2-6t+4)\cdot(t-8)+(6t-46)\cdot(t-5)-(t+5)(t-5)\cdot(t-8)}{(t-5)\cdot(t-8)}\leq 0$$

$$\frac{\cancel{t^3}-8t^2-\cancel{6t^2}+48t+4t-32+\cancel{6t^2}-30t-46t+230-\cancel{t^3}+\cancel{8t^2}+25t-200}{(t-5)\cdot(t-8)}\leq 0$$

$$\frac{48t+4t-30t-46t+25t-32+230-200}{(t-5)(t-8)}\leq 0$$

$$\frac{t-2}{(t-5)(t-8)}\leq 0\ ;\ t=2;\ t\neq 5;\ t\neq 8$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\leq 2\\ t>0\end{cases}\\ \begin{cases}5<t<8\\ t>0\end{cases}\end{array}\right.\ ;\quad 5<t<8$$

$$5<2^x<8$$

$$\log_2 5<x<3$$

Ответ: $x\in(\log_2 5;\ 3)$

При решении в конце решения потерян промежуток. Задача решена неверно, ошибка не вычислительная.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 14)

№ 15.

$$\frac{4^x-3\cdot 2^{x+1}+4}{2^x-5}+\frac{3\cdot 2^{x+1}-46}{2^x-8}\leqslant 2^x+5$$

$$\frac{2^{2x}-6\cdot 2^x+4}{2^x-5}+\frac{6\cdot 2^x-46}{2^x-8}-\frac{(2^x+5)(2^x-5)(2^x-8)}{(2^x-5)(2^x-8)}\leqslant 0$$

$$\frac{(2^{2x}-6\cdot 2^x+4)(2^x-8)+(6\cdot 2^x-46)(2^x-5)-(2^{2x}-25)(2^x-8)}{(2^x-5)(2^x-8)}\leqslant 0$$

Раскрыла скобки и привела подобные:

$$\frac{-95\cdot 2^x-2}{(2^x-5)(2^x-8)}\leqslant 0 \quad \Big|:(-1)$$

$$\frac{95\cdot 2^x+2}{(2^x-5)(2^x-8)}\geqslant 0 \quad \Big|:(95\ 2^x+2),\ \text{т.к. } (95\cdot 2^x+2)>0$$

$$\frac{1}{(2^x-5)(2^x-8)}\geqslant 0$$

Решу неравенство нестрогим методом интервалов:

$\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$

$2<\log_2 5<3$

$x\in(-\infty;\ \log_2 5)\cup(3;\ \cancel{\log}+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;\ \log_2 5)\cup(3;\ +\infty)$

При раскрывании скобок и приведении подобных получен неверный результат. К сожалению, преобразования не приведены и трудно судить о характере ошибок. Поэтому за решение нельзя поставить 1 балл.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 15)

Задание № 15

$$\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

$$\frac{3^{2x}-2\cdot 3^1\cdot 3^x+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^1\cdot 3^x-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

$$\frac{3^{2x}-6\cdot 3^x+4}{3^x-5}+\frac{6\cdot 3^x-51}{3^x-9}\le 3^x+5$$

Пусть $3^x=t$, причем $t>0$, тогда:

$$\frac{t^2-6t+4}{t-5}+\frac{6t-51}{t-9}\le t+5$$

$$\frac{t^2-6t+4}{t-5}^{(t-9}+\frac{6t-51}{t-9}^{(t-5}-t-5^{(t^2-14t+45}_{(t^2-14t+45}\le 0$$

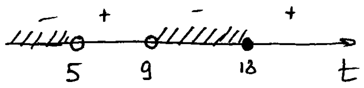
$$\frac{\cancel{t^3}-9t^2-6t^2+54t+4t-36+6t^2-30t-51t+255-\cancel{t^3}+14t^2-45t-5t^2+70t-225}{(t-9)(t-5)}\le 0$$

$$\frac{\cancel{-20t^2}+\cancel{20t^2}+2t-36}{(t-9)(t-5)}\le 0$$

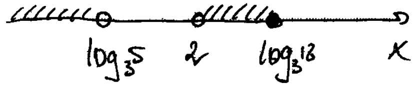
$$\frac{2t-36}{(t-9)(t-5)}\le 0$$

$$\frac{2(t-18)}{(t-9)(t-5)}\le 0$$

$$\frac{(t-18)}{(t-9)(t-5)}\le 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t<5 \\ \begin{cases} t>9 \\ t\le 18 \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3^x<5 \\ \begin{cases} 3^x>9 \\ 3^x\le 18 \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3^x<5 \\ \begin{cases} 3^x>3^2 \\ 3^x\le 18 \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<\log_3 5 \\ \begin{cases} x>2 \\ x\le \log_3 18 \end{cases}\end{array}\right.$$



Ответ: $x\in(-\infty;\log_3 5)\cup(2;\log_3 18]$

При раскрывании скобок и приведении подобных получен неверный результат. Допущена одна вычислительная ошибка.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 16)

№ 15)

ОДЗ:

$2^x-5\neq0 \qquad 2^x-8\neq0$

$x\neq\log_2 5 \qquad x\neq3$

$$\frac{4^x-3\cdot2^{x+1}+4}{2^x-5}+\frac{3\cdot2^{x+1}-46}{2^x-8}\leq 2^x+5$$

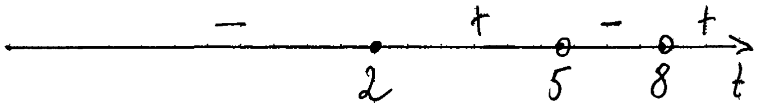
$$\frac{2^{2x}-3\cdot2^1\cdot2^x+4}{2^x-5}+\frac{3\cdot2^1\cdot2^x-46}{2^x-8}\leq 2^x+5 \quad \Big/ 2^x=t$$

$$\frac{\overset{t-8}{t^2-6t+4}}{t-5}+\frac{\overset{t-5}{6t-46}}{t-8}\leq \overset{(t-8)(t-5)}{t+5}$$

$$\frac{t^3-14t^2+\overset{52t}{\cancel{44t}}-32+6t^2-76t+230\leq t^3-25t-8t^2+200}{(t-5)(t-8)}$$

$$\frac{\cancel{t^3}-14t^2+\overset{52t}{\cancel{44t}}-32+6t^2-76t+230-\cancel{t^3}+25t+8t^2-200}{(t-5)(t-8)}\leq0$$

$$\frac{t-2}{(t-8)(t-5)} \le 0$$



Тогда:

$t \in (-\infty; 2] \cup (5; 8)$

$2^x \in (-\infty; 2] \cup (5; 8) \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup (\log_2 5; 3)$

С учётом ОДЗ,

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup (\log_2 5; 3)$

Решение верное. Возможно, недостаточно подробное. Но тем не менее заслуживает оценки 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 15 (ПРИМЕР 17)

(15) $$\frac{4^x-3\cdot 2^{x+1}+4}{2^x-5}\llcorner^{2^x-8} + \frac{3\cdot 2^{x+1}-46}{2^x-8}\llcorner^{2^x-5} \le 2^x+5 \;\llcorner (2^x-8)(2^x-5)$$

$$\frac{(2^{2x}-6\cdot 2^x+4)(2^x-8)+(6\cdot 2^x-46)(2^x-5)-(2^x+5)\cdot(2^x-8)(2^x-5)}{(2^x-5)(2^x-8)}\le 0$$

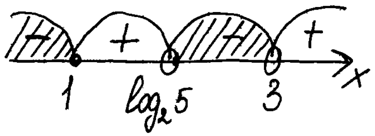
$$\frac{2^{3x}-6\cdot 2^{2x}+4\cdot 2^x-8\cdot 2^{2x}+48\cdot 2^x-32+6\cdot 2^{2x}-46\cdot 2^x-30\cdot 2^x+46\cdot 5-2^{3x}-5\cdot 2^{2x}+40\cdot 2^x+5\cdot 2^{2x}+25\cdot 2^x-40\cdot 2^x}{(2^x-5)(2^x-8)}$$

$$=\frac{40\cdot 5}{}\le 0$$

применен метод рационализации

$$\frac{2^x-2}{(2^x-5)(2^x-8)}\le 0 \Rightarrow \frac{2^x-2^1}{(2^x-5)(2^x-8)}\le 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(2-1)}{(x-\log_2 5)(x-3)(2-1)}\le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{(x-\log_2 5)(x-3)}\le 0$$



$$\Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup(\log_2 5;3)$$

Ответ: $(-\infty;1]\cup(\log_2 5;3)$

Решение верное. Не хватает при применении метода рационализации еще одного множителя (2 – 1), но тем не менее заслуживает оценки 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Задание № 16.

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 177 120 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей составит общая сумма платежей, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение

Пусть сумма кредита составляет S = 177 120 рублей, а ежегодные выплаты X рублей. По условию долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом: S, $\frac{5}{4}S-X$, $\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot S-\frac{5}{4}X-X$, $\left(\frac{5}{4}\right)^3\cdot S-\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot X-\frac{5}{4}X-X$, $\left(\frac{5}{4}\right)^4\cdot S-\left(\frac{5}{4}\right)^3\cdot X-\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot X-\frac{5}{4}X-X=0$, откуда

$$X-\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^4\left(\frac{5}{4}-1\right)}{\left(\frac{5}{4}\right)^4-1}S-\frac{625}{1476}S.$$

Получаем X = 75000 рублей. Значит, банку будет выплачено 300 000 рублей.

Ответ: 300 000 рублей.

Типичные ошибки

1) Ошибки в математической модели.

В математической модели забывали вычислять выплаты за 4 года.

Ошибки могли совершаться и в составлении таблицы (вместо одинаковых выплат брались уменьшения долга на одну и ту же величину), и в составлении уравнения.

2) Вычислительные ошибки.

Следует отметить, что в условиях разных вариантов были разные уровни сложности вычислений: в одних после решения получался ответ 234 256, в других – 300 000. Многие выпускники, получив первый ответ, не были уверены в правильности решения. Кроме того, при начислении 10 % и 25 % – совершенно разные по сложности задачи. В первом случае достаточно работать с десятичными дробями, во втором – только с обыкновенными, десятичные дроби приводят к жутким вычислениям. Многие выпускники были к этому не готовы. Простая с точки зрения алгоритма задача становилась неподъемной из-за вычислений.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 18)

№ 16.

Пусть S – сумма кредит, тогда:

Год	Начисление %	Выплаты	На конец года
1	$1,25S$	x	$1,25S - x$
2	$1,25\cancel{(S-x)}(1,25S-x)$	x	$\cancel{1,25(S-x)-x}\ 1,25(1,25S-x)-x$
3	$(1,25(1,25S-x)-x)1,25$	x	$(1,25(1,25S-x)-x)1,25-x$
4	$1,25(1,25(1,25(1,25S-x)-x)-x)$	x	$1,25(1,25(1,25(1,25S-x)-x)-x)-x$

Зная, что ~~вы~~ кредит был погашен за 4 года:

$$1,25(1,25(1,25(1,25S-x)-x)-x)-x=0$$

$$1,25^4S-1,25^2(2,25x)-2,25x=0$$

$$(1,25^2\cdot 2,25+2,25)(-x)=1,25^4S$$

$$x=\frac{1,25^4S}{2,5625} \neq \quad S=177\,120 \text{ руб (по усл)}$$

$$x=\frac{1,25^4\cdot 177\,120}{2,5625}=161750 \text{ руб.}$$

Ответ: Общая сумма платежей составит 161750 руб.

Решение неверное. Во-первых, ошибка в модели. Считаются выплаты за 1 год, а не за 4. Кроме того, есть вычислительная ошибка.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 19)

№ 16

S- кредит = 177120

$k=1{,}25$

x- выплата (за 1 год)

Год	Кредит	После %	Выплата	Остаток
2027	S	kS	X	$kS-X$
2028	$kS-X$	k^2S-kX	X	$k^2S-kX-X$
2029	$k^2S-kX-X$	k^3S-k^2X-kX	X	$k^3S-k^2X-kX-X$
2030	$k^3S-k^2X-kX-X$	$k^4S-\cancel{k^3X}-k^2X-kX$	X	0

$$k^4S-k^3X-k^2X-kX=0$$

$$k^4S=kX+k^2X+k^3X$$

$$k=1{,}25=\frac{5}{4}\Rightarrow\left(\frac{5}{4}\right)^4S=\frac{5}{4}\cdot X+\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot X+\left(\frac{5}{4}\right)^3\cdot X\Rightarrow\frac{625}{256}\cdot S=\frac{369}{64}\cdot X$$

$$\frac{625}{256}\cdot S=\frac{1476}{256}\cdot X\Rightarrow 625S=1476X\Rightarrow X=\frac{625S}{1476}$$

$$X=\frac{625\cdot 177120}{1476}$$

$$X=70756{,}25$$

Всего 4 выплаты $\Rightarrow 4X=70756{,}25\cdot 4=283025$

Ответ: 283025 руб.

Уравнение составлено неверно, ошибка в математической модели (хотя в таблице все верно).

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 20)

16) $S = 177120$ руб. – сумма, которую планируют взять в кредит.

$p = 25(\%)$ – процент, на который долг увеличивается по сравнению с предыдущим долгом. $q = 1 + \frac{25}{100} = 1{,}25$

$n = 4$ года. B = выплата $(B - ?)$

Сумма до начисления (%)

Сумма после начисления (%)

$$S \searrow Sk \xrightarrow{x_1} \frac{3}{4}S \searrow \frac{3}{4}Sk \xrightarrow{x_2} \frac{2}{4}S \searrow \frac{2}{4}Sk \xrightarrow{x_3} \frac{1}{4}S \searrow \frac{1}{4}Sk \xrightarrow{x_4} 0$$

$x_1 = Sk - \frac{3}{4}S$ – сумма после 1-ой выплаты.

$x_2 = \frac{3}{4}Sk - \frac{2}{4}S$ – сумма после 2-ой выплаты

$x_3 = \frac{2}{4}Sk - \frac{1}{4}S$

$x_4 = \frac{1}{4}Sk$

$$B = \frac{177\,120 \cdot 5^4}{4^4\left(\frac{5^3}{4^3} \cdot \frac{5^2}{4^2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{4}\right)} = \frac{177\,120 \cdot 5^4}{4^4\left(5^3 \cdot 4 + 4^2 \cdot 5 + 5 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^2\right)} = \frac{4920 \cdot 5^4}{41} =$$

$= 75.000.$

$4B\ X = 4 \cdot 75\,000 = 300\,000$

Ответ: 300.000р.

Математическая модель составлена неверно (одинаковое уменьшение остатков вместо одинаковых выплат).

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 21)

16. Пусть S – сумма дома

март – месяц платежа

x – ежегодная выплата

Дата	Сумма дома
и 26	S
я 27	$1{,}2S$
и 27	$1{,}2S - x$
я 28	$1{,}2^2S - 1{,}2x$
и 28	$1{,}2^2S - 1{,}2x - x$
я 29	$1{,}2^3S - 1{,}2^2x - 1{,}2x$
и 29	$1{,}2^3S - 1{,}2^2x - 1{,}2x - x$
я 30	$1{,}2^4S - 1{,}2^3x - 1{,}2^2x - 1{,}2x$
и 30	$1{,}2^4S - 1{,}2^3x - 1{,}2^2x - 1{,}2x - x = 0$

$$1{,}2^4S - 1{,}2^3x - 1{,}2^2x - 1{,}2x - x = 0$$

$$1{,}2^4S = 1{,}2^3x + 1{,}2^2x + 1{,}2x + x$$

$$\frac{6^4}{5^4} S = \frac{6^3}{5^3} x + \frac{6^2}{5^2} x + \frac{6}{5} x + x$$

$$\frac{6^4}{5^4} S = \frac{6^3 x + 6^2 \cdot 5x + 6 \cdot 25x + 125x}{5^3}$$

$$\frac{6^4}{5^4} S = \frac{216x + 180x + 150x + 125x}{5^3}$$

$$\frac{6^4 S}{5^4} = \frac{671x}{5^3}$$

$$6^4 S \cdot \cancel{5^3} = 671x \cdot 5^{\cancel{4}} \qquad \Big| : 5^3$$

$$6^4 \cdot 419375 = 3355x \qquad \Big| : 5$$

$$6^4 \cdot 83875 = 671x \qquad \Big| : 671$$

$$6^4 \cdot 125 = x$$

$$x = 151000$$

Общая сумма платежей $= 4x = 4 \cdot 151000 = 604000$ р

Ответ: 604000 р

Математическая модель построена верно. Решение содержит одну вычислительную ошибку.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 22)

№ 16 $S = 419.375$ руб. $n = 4$ года x – платёж

$r\% = 20\%$ $\quad p = 1 + \frac{r}{20} = 1{,}2$ $\quad 4x - ?$

Таблица:

	долг до %	после %	платёж	долг после платежа
1г	S	Sp	x	$Sp - x$
2г	$Sp - x$	$(Sp-x)p$	x	$(Sp-x)(p-x)$
3г	$(Sp-x)p-x$	$(Sp-x)(p-x)p$	x	$(Sp-x)(p-x)(p-x)$
4г	$(Sp-x)(p-x)(p-x)$	$(Sp-x)(p-x)(p-x)p$	x	$(Sp-x)(p-x)(p-x)(p-x)$

$(Sp-x)(p-x)(p-x)(p-x) = 0$

Выразим x: $\quad x = \frac{Sp^4}{p^3+p^2+p+1} = \frac{419375 \cdot 2{,}0736}{4{,}792} =$

$= \frac{833198}{4{,}792}$

Математическая модель построена верно. Решение не доведено до конца – выпускник столкнулся с неоправданно сложными вычислениями.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 16 (ПРИМЕР 23)

№16. Дано:
$N=4$ года
S - кредит $S=177120$
$r=25\% \Rightarrow k=1{,}25=\frac{5}{4}$
платежи равные
сумма платежей = ?

Решение (с помощью таблицы):

N	январь	февраль-июнь
1	kS	$kS-x$
2	$(kS-x)k$	$(kS-x)k-x$
3	$((kS-x)k-x)k$	$((kS-x)k-x)k-x$
4	$(((kS-x)k-x)k-x)k$	$(((kS-x)k-x)k-x)k-x$

$\boxed{\text{Пусть } x \text{ - один платеж}} \Rightarrow$

$(((kS-x)k-x)k-x)k-x=0$

$\cancel{(((k^2S-kx-x)-x)k-x=0}$ $((k^2S-kx-x)k-x)k-x=0$

$(k^3S-k^2x-kx-x)k-x=0$

$k^4S-k^3x-k^2x-kx-x=0$

$\frac{625}{256}\cdot177120-\frac{125}{64}\cdot x-\frac{25}{16}\cdot x-\frac{5}{4}\cdot x-x=0$

$\frac{625}{256}\cdot177120-\left(\frac{125x}{64}+\frac{100x}{64}+\frac{80x}{64}+\frac{64x}{64}\right)=0$

$\frac{625}{256}\cdot177120-\frac{369x}{64}=0 \Rightarrow \frac{625}{4}\cdot177120-369x=0$

$625\cdot177120-1476x=0$

$1476x=625\cdot177120$

$492x=625\cdot59040$

$164x=625\cdot19680$

$\cancel{58x=625\cdot6560}$

$\cancel{29x=625\cdot3280}$

$x=625\cdot120 \Rightarrow$

$x=75000 \Rightarrow$

Общая сумма платежей равна $75000\cdot4=$
$=300000$

Ответ: 300000.

Верное решение. Все шаги выполнены верно.

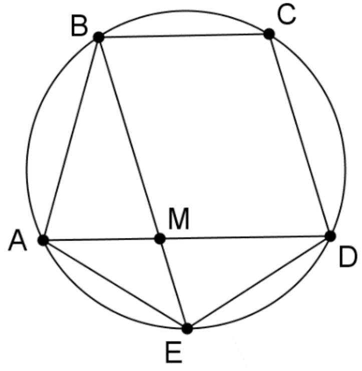
Оценка эксперта: 2 балла.

Задание № 17.

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M. Известно, что $BCDM$ – параллелограмм.

а) Докажите, что $BC = DE$.

б) Найдите длину стороны AB, если известно, что $DE = 4$, $AD = 7$, $BE = 8$ и $AB > BC$.



Решение

а) Прямые CD и BE, содержащие противоположные стороны параллелограмма $BCDM$, параллельны. Значит, $\angle CDB = \angle EBD$. Следовательно, хорды BC и DE равны, поскольку на них опираются равные углы CDB и EBD соответственно.

б) Пусть $AB = x$. Аналогично пункту а) из параллельности BC и DM получаем, что $CD = AB = x$. Четырехугольник $BCDM$ является параллелограммом, поэтому $BM = CD = AB = x$, $DM = BC = DE = 4$. Следовательно, треугольники ABM и MDE – равнобедренные, причём $\angle BAM = \angle AMB = \angle DME = \angle DEM$. Значит, эти треугольники подобны. Найдем основания этих треугольников. $AM = AD - DM = 3$, $EM = BE - BM = 8 - x$. Получаем:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{EM}{DE};\ \frac{3}{x} = \frac{8-x}{4};\ x^2 - 8x + 12 = 0,$$

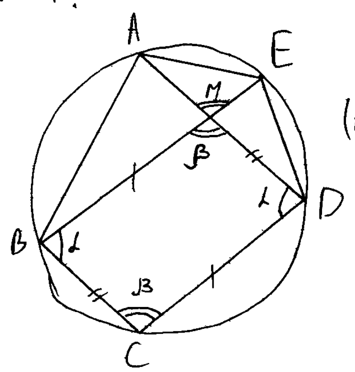
откуда $x = 2$ или $x = 6$. Учитывая условие $AB > BC$, получаем $AB = 6$.

Типичные ошибки

1) Неверные свойства вписанных углов.
2) Неверно составленные пропорции.
3) Не выбран или неверно выбран ответ при решении квадратного уравнения.
4) Вычислительные ошибки.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 24)

№ 17.



Решение.

(А) 1) BCDM – параллел $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} (1)\ \angle BCD = \angle BMD = \beta \\ (2)\ \angle CBM = \angle CDM = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \angle\beta + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 180 - \beta = \alpha$

2) Рассмотрим $\triangle AEM$.

$\angle AME = \angle BMD = \beta$ (из 1) (как верт.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MAE + \angle MEA = 180^\circ - \angle AME = 180^\circ - \beta = \alpha$ (из 1)

3) $\left.\begin{array}{l} \angle MAE \text{ и } \angle MEA \text{ – вписанные} \\ \angle MAE + \angle MEA = \alpha \text{ (из 2)} \\ \angle MAE \text{ – опирается на } \smile ED \\ \angle MEA \text{ – опирается на } \smile AB \end{array}\right\} \Rightarrow \smile ED + \smile AB = \frac{1}{2}(\angle MAE + MEA) = \frac{\alpha}{2}$

4) $\left.\begin{array}{l} \angle CDA = \alpha \text{ (из А1)} \\ \angle CDA \text{ опирается на } \smile ABC \end{array}\right\} \Rightarrow \smile ABC = \frac{\alpha}{2}$

5) $\left.\begin{array}{l} \smile ABC = \frac{\alpha}{2} \text{ (из 4)} \\ \smile ED + \smile AB = \frac{\alpha}{2} \text{ (из 3)} \\ \smile ABC = \smile AB + \smile BC \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\smile ED + \smile BC = \frac{\alpha}{2}}$

$\left.\begin{array}{l} \smile ED = \frac{\alpha}{2} - \smile AB \\ \smile BC = \frac{\alpha}{2} - \smile AB \end{array}\right\} \Rightarrow \smile ED = \smile BC \Rightarrow$

$\Rightarrow ED = BC$

ч.т.д.

(Б) 1) ~~$\angle MAE = \angle MEA = \alpha$ (из 2(А))~~ т. т. у.

$\angle CBE = \alpha$ (из 1(А))
$\angle CBE$ опирается на $\smile CDE$ $\Big\} \Rightarrow \smile CDE = \frac{\alpha}{2}$

2) $\angle \smile CDE = \frac{\alpha}{2}$ (из 1)
$\smile ED + \smile AB = \frac{\alpha}{2}$ (из 3(А))
$\smile CDE = \smile CD + \smile DE$ $\Bigg\} \Rightarrow$ $\smile CD = \frac{\alpha}{2} - \smile DE$, $\smile AB = \frac{\alpha}{2} - \smile DE$ $\Big\} \Rightarrow \smile CD = \smile AB \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = AB$

3) $\angle BAC$ опирается на $\smile BCD$
$\angle BED$ опирается на $\smile BCD$ $\Big\} \Rightarrow \angle BAC = \angle BED = \alpha$

4) $BE = 8$ (по усл)
$BM = x$ $\Big\} \Rightarrow ME = 8 - x$

5) $BCDM$ - паралл. $\Rightarrow \angle CDM = \angle BMA = \alpha$ (как соответст.) $\Rightarrow$

$= \angle BMA = \angle DME = \alpha$ (как вертик.)

6) Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle DME$:

$\left.\begin{array}{l}\angle BMA = \angle DME = \alpha \text{ (из 5)} \\ \angle BAM = \angle DEM = \alpha \text{ (из 3)}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle EDM$ (по равенству двух углов) $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \dfrac{BM}{DM} = \dfrac{AM}{EM} \\ DM = BC = ED = 4\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{7-4}{8-x}$ (т.к. $AD = 7$) (~~т.т~~ из 4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 8x - x^2 = 4 \cdot 3$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$x = 6$ или $x = 2$

т.к. $AB > BC$ (по усл.), а $BC = 4$ $\left.\begin{array}{l}\Rightarrow x = 6 \\ BM = x\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow BM = 6$

7) $\left.\begin{array}{l}CD = BM \text{ (т.к. } BCDM \text{ - параллелограмм)} \\ CD = AB \text{ (из 2)}\end{array}\right\} \Rightarrow AB = BM = 6$ (из 6)

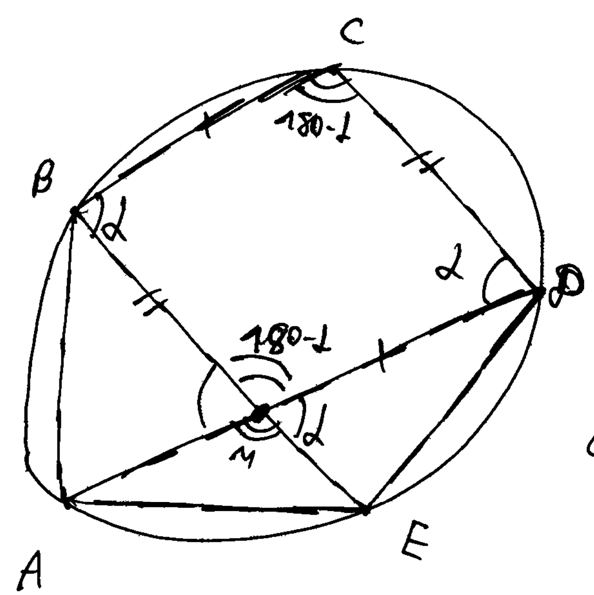
Ответ: $AB = 6$.

Неверный геометрический факт (свойство вписанных углов, который в два раза меньше дуги, на которую они опираются), используемый в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 25)

№17



Дано: $ABCDE$ впис в окр.

$BCDM$ - пар-м; $AD \cap BE = M$

а) Д-ть: $BC = DE$

б) Н-и: $AB = ?$ $DE = 4$; $AD = 7$; $BE = 8$; $AB > BC$

а) 1) Пусть $\angle CBE = \alpha \Rightarrow \angle CDM = \alpha$ (пар-м)

Тогда $\angle BCD = 180 - \alpha$ (углы при одной стороне пар-ма)

2) $\angle DME = \angle CBE = \alpha$ т. к. $BC \parallel DM$ (соотв. углы)

~~$\angle BMA = \angle DME$ (верт) $= \alpha$~~

3) $BCDE$ вписан в окр-ть $\Rightarrow$ $\angle CBE + \angle CDE = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDE = 180 - \alpha = \angle BCD \Rightarrow BCDE$ − р/б трапеция $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = DE$

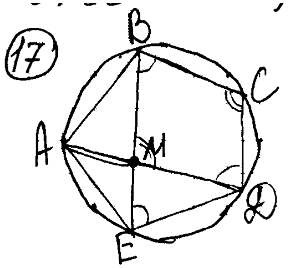
ч. т. д.

В задании решен только пункт а). Пункт б) отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 26)

17



а) Доказательство:

1. $BCDM$ – параллелограмм $\Rightarrow BM \parallel CD \Rightarrow$
$BE \parallel CD$ (т.к. E ~~[illegible]~~ лежит на продолж. BM) $\Rightarrow$
$BCDE$ – трапеция (по опр. трапеции.)

А так. как ~~[illegible]~~ $BCDE$ – впис. в окружность $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $BCDE$ – равнобедр. трапеция (т.к. если трапеция впис. в окр., то она равнобедр.) А значит $BC = DE$ (по опр. равнобедр. трап.) (Или $\angle BCD + \angle EBC = 180°$ ~~[illegible]~~ т.к. одностор при пар. ал. пр. ям.)
и $\angle BCD + \angle BED = 180°$ (~~т.к.~~ по св-ву впис. чет.) $\Rightarrow \angle CBE = \angle BED$ ~~(т.к. [illegible] из равенства углов)~~ ~~(как~~ $\Rightarrow \angle CDE + \angle BED = 180$ (как одностор. при парал. прямых CD и BE) $\Rightarrow \angle CDE = \angle BCD$. ~~из равенства угл.)~~ ~~А так как~~ $\Rightarrow$
$\Rightarrow BCDE$ – равнобедр. трап. (по приз. равнобедр. трап.)
$\Rightarrow BC = DE$ (по опр. равнобедр. трап.)
ЧТД

б) Решение:

$$\left.\begin{aligned}&1.\ BC = ED\\ &BC = DM \text{ (по опр. пар-мма)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow BC = DM = DE = 5$$

~~[illegible]~~

2)Рассмотрим $\triangle MED$ и $\triangle MAB$

$\angle MED = \angle MAD$ (т.к. опир. на $\smile BD$)

~~$\angle DE$~~ $\angle DME = \angle BMA$ (как вертик.)

$\Rightarrow \triangle MED \sim \triangle MAB$ (по 1 приз. под. тр.)

Отсюда $\frac{AB}{DE} = \frac{AM}{MD} = \frac{MB}{ME}$ (как соот. эл.)

~~$AM = AD - MD = 9 - 5 = 4$~~ $AM = AD - MD = 9 - 5 = 4$

~~$\frac{AB}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow AB = 4$~~

$\frac{4}{5} = \frac{MB}{12-MB} \Rightarrow MB = \frac{48}{9} \Rightarrow$

$MB = \cancel{AB} = CD = \frac{48}{9}$ (т.к. $BCDA$ – равнобед тр.), т.к. $BC \parallel AD$, а $BCDA$ – впис. трап.)

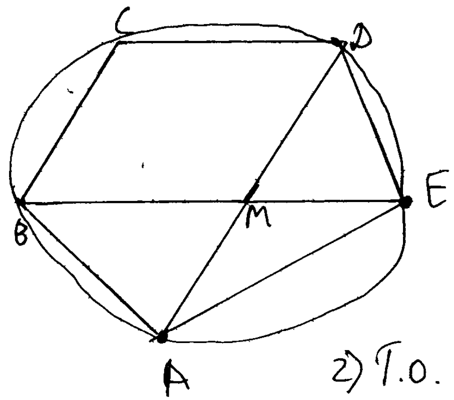
Ответ: ~~4~~ $\frac{48}{9}$

В задании правильно решен пункт а). В пункте б) неверно составлена пропорция.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 27)

№17.



Дано: ABCDE вп. в окр.

$AD \cap BE = M$

$BCDM$ - пар-м

Д-ть: $BC = DE$

Д-во:

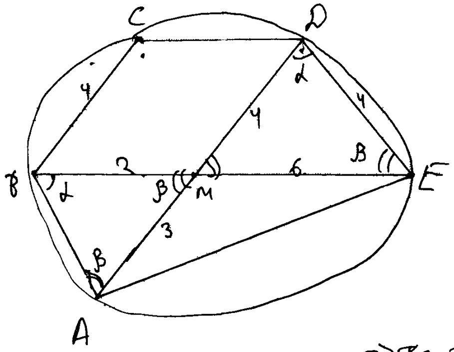
1) Т.к. $BCDM$ - пар-м, то

$CD \parallel BM \Rightarrow CD \parallel BE$

2) Т.о. $BCDE$ - трапеция с осн-ми

CD и BE. НО! в окр-ть может быть

вписана только равнобедренная трапеция $\Rightarrow CB = DE$ ∎



Дано: $DE=4$

$AD=7$

$BE=8$

$AB>BC$

$AB-?$

1) т.к. вп. п. а $BC=DE=4$

2) т.к. $BCDM$ – пар-м, $DM=BC=4 \Rightarrow$

$\Rightarrow AM=AD-MD=7-4=3$

3) $\angle ADE=\angle ABE$ (опир на AE)

4) $\angle DEM=\angle DME=\beta$ (в р/б $\triangle MDE$)

5) $\angle DME=\angle BMA=\beta$ (верт)

$\Rightarrow \triangle BMA \sim \triangle DME \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BM}{MD}=\frac{BA}{DE}=\frac{MA}{ME}$; $\frac{8-ME}{4}=\frac{BA}{4}=\frac{3}{ME}$; $12=8ME-ME^2$

$ME^2-8ME+12=0$

6) $\frac{BA}{4}=\frac{3}{ME}$; $\left[\begin{array}{l}\frac{BA}{4}=\frac{3}{2};\ BA=6\\ \frac{BA}{4}=\frac{3}{6};\ BA=2\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}ME=6\\ ME=2\end{array}\right.$

но по усл. $AB>BC$;

$AB=6 \Rightarrow BM=$

$BE-AB=8-6=2$

7) $BM=AB=2$ т.к. $\angle BMA=\angle BAM$ ($\Rightarrow$ из подобия)

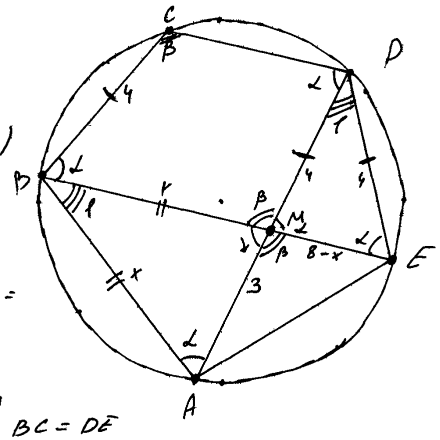
Отв: $AB=2$

Верно решен пункт а). В пункте б) при верном решении в ответ записан не тот результат, что может быть приравнено к вычислительной ошибке.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 28)

Решение: а.)



1.) Пусть $\angle CBM = \angle CDM = \alpha$ (т.к. BCDM-парал.)

$\angle BCD = \angle BMD = \beta$ (т.к. BCDM-парал.)

$\angle BME = 180^\circ - \angle BMD = 180^\circ - \beta = \alpha$, как смежные, а $\alpha + \beta = 180^\circ$ по свойству параллелограмма.

2.) Вписанные углы $\angle BCD + \angle DEB = 180^\circ \Rightarrow \beta + \angle DEB = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEB = \alpha \Rightarrow$ Т.к. в $\triangle MDE$ $\angle DME = \angle DEM = \alpha$, то $DM = DE$, а т.к. BCDM-парал., то $BC = DM \Rightarrow BC = DE$

ч.т.д.

б.)

3.) $\angle BMA = 180^\circ - \angle BMD = \alpha$, как смежные

Как вписанные углы, опирающиеся на дугу BD: $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ \Rightarrow \angle BAD = \alpha \Rightarrow \triangle BAM$ - равнобедр $\Rightarrow AB = BM$

$AM = AD - DM = 7 - 4 = 3$

4.) Пусть $AB = BM = x$, тогда $ME = BE - BM = 8 - x$

$\angle ABE = \angle ADE = 1$ как вписанные, опир. на одну дугу.

$\triangle ABM$ и $\triangle MDE$ подобны по двум углам $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{8-x} = \frac{x}{4} \Rightarrow 12 = 8x - x^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$D = 64 - 48 = 16, \sqrt{D} = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{8+4}{2} \\ x = \frac{8-4}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Т.к. по условию $AB > BC$, т.е. $x > 4$, то $x = 6 \Rightarrow AB = 6$

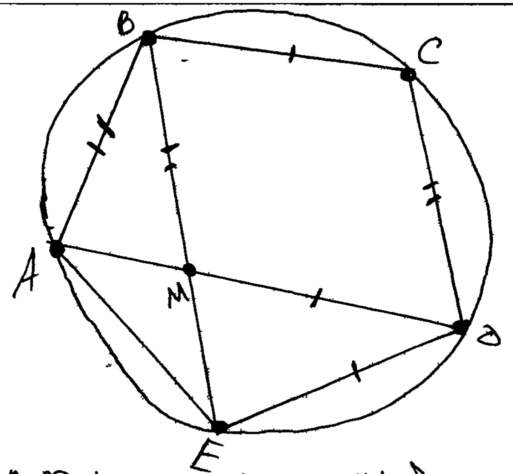
Ответ: 6

Верное решение обоих пунктов. Пункт б) решен через подобие треугольников.

Оценка эксперта: 3 балла.

ЗАДАНИЕ № 17 (ПРИМЕР 29)

~~17~~.17.



а) ① BCDM- параллелограмм ⇒

BM = CD

BC = MD, т.е. чтобы BC = DE, нам надо доказать MD = DE.

② BCDM - паралл ⇒ CD || BM, тогда

CD || BE, отсюда

получаем, что BCDE – трапеция

③ т.к. около BCDE описана окр, делаем вывод, что BCDE – р/б трапеция ⇒

BC = DE ■

б) ① $BC \parallel MD \Rightarrow BC \parallel AD$, тогда $ABCD$ – р/б трапеция (т.к. описать окр. можно только около р/б трап).
$AB = CD$.

② по т. Птолемея: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$, $(AC = BD) - 7$
$AC^2 = AB^2 + 54$. (в р/б трап. $ABCD$)

в $BCDE$: по Т. Птолемея: $BD \cdot CE = BC \cdot DE + CD \cdot BE$ $(BD = CE)$ (см. на след. шеме)

$BD^2 = 36 + 11CD$

③ $36 + 11CD = AB^2 + 54 \Rightarrow AB = CD$ (р/б трап.

$CD^2 - 11CD + 18 = 0$.

$CD = x$

$x^2 - 11x + 18 = 0$

$D = 121 - 72 = 49$

$x_1 = \frac{11-7}{2} = 2$ $\quad x_2 = \frac{11+7}{2} = 9$.

~~$x_2 = 6$?~~ ~~$\Rightarrow AB = 6$.~~ Ответ: $AB = 9$.

Верное решение обоих пунктов. Пункт б) решен через теорему Птолемея.

Оценка эксперта: 3 балла.

Задание № 18.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + ay + a - 2 = 0, \\ x|y| + x - 2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Уравнение $x + ay + a - 2 = 0$ задает для каждого значения a на плоскости Oxy прямую l, проходящую через точки $(2; -1)$ и $(2 - a; 0)$. При всевозможных значениях a получаются прямые, проходящие через точку $(2; -1)$, кроме прямой $y = -1$.

Уравнение $x|y| + x - 2 = 0$ задает на плоскости Oxy множество точек, представляющее собой объединение части ω_1 ветви гиперболы $y = \frac{2}{x} - 1$, соответствующей $y \geq 0$ (при $0 < x \leq 2$) и части ω_2 ветви гиперболы $y = -\frac{2}{x} + 1$, соответствующей $y < 0$ (при $0 < x < 2$).

Рассмотрим расположение прямой l и части гиперболы ω_1.

При $a < 0$ для $0 < x \leq 2$ ординаты точек прямой $ay = -x - a + 2$ отрицательны, а ординаты точек части ветви гиперболы неотрицательны, следовательно, у них нет общих точек.

При $a = 0$ у прямой l и части гиперболы ω_1 одна общая точка $(2; 0)$.

Найдем положительное значение a, при котором прямая l и часть гиперболы ω_1 касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $(-ay - a + 2)y - ay - a + 2 - 2 = 0$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение в виде $ay^2 + (2a - 2)y + a = 0$, дискриминант этого квадратного уравнения $D = (2a - 2)^2 - 4a^2 = 4 - 8a$. Условие $D = 0$ выполнено при $a = 0{,}5$. Уравнение имеет корень $y = 1$. Точка касания $(1; 1)$. При отрицательном дискриминанте, т. е. при $a > 0{,}5$, уравнение не имеет корней, следовательно, общих точек у прямой l и части гиперболы ω_1 нет.

При $0 < a < 0{,}5$ уравнение $ay^2 + (2a - 2)y + a = 0$ имеет положительный дискриминант. Значит, уравнение имеет 2 корня, сумма которых равна $\frac{2 - 2a}{a}$, а произведение равно 1. Следовательно, эти корни положительны.

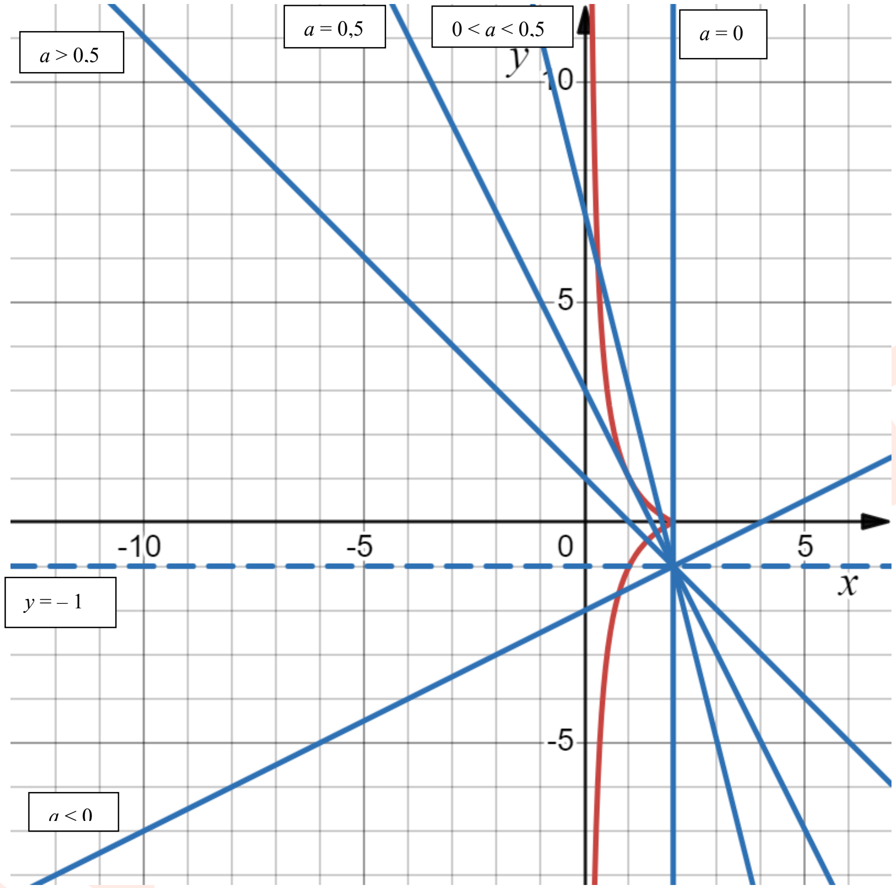
Таким образом, l и ω_1 имеют 2 общие точки при $0 < a < 0{,}5$, одну общую точку при $a = 0$ и $a = 0{,}5$, не имеют общих точек при $a > 0{,}5$ и $a < 0$.

Рассмотрим расположение прямой l и части гиперболы ω_2.

При $a = 0$ у прямой l и части гиперболы ω_2 нет общих точек.

Найдем ненулевое значение a, при котором прямая l и часть гиперболы ω_2 имеют общие точки. В этом случае уравнение $(-ay - a + 2)y + ay + a - 2 + 2 = 0$ должно иметь хотя бы один отрицательный корень. Запишем это уравнение в виде $ay^2 - 2y - a = 0$, дискриминант этого квадратного уравнения $D = 4 + 4a^2$ положительный при всех значениях a. Таким образом, уравнение имеет 2 противоположных по знаку корня, поскольку по теореме Виета их произведение равно -1.

Итак, l и ω_2 имеют одну общую точку при $a \neq 0$ и не имеют общих точек при $a = 0$.
Таким образом, найдено два граничных значения параметра $a = 0$ (система имеет одно решение), $a = 0,5$ (два решения).
Система уравнений имеет единственное решение при $a \leq 0$ и при $a > 0,5$.



Типичные ошибки

1) При реализации графического метода не отбрасываются части гиперболы, не соответствующие условию для модуля, из-за чего модель получается неверной и неверно определяется число точек пересечения.
2) При реализации аналитического метода неверно решаются получающиеся неравенства.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 30)

задание 18

a - ?; у сис-мы 1 реш-е

$$\begin{cases} 2x+2ay+a-6=0 \quad (2) \\ x|y|+2x-6=0 \quad (1) \end{cases}$$

(1) $x|y|+2x-6=0$

$x|y|=-2x+6 \;|:x$ ($x=0$ - не корень)

$|y|=\frac{6}{x}-2$

$$\begin{cases} \frac{6}{x}-2\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{6}{x}-2 \\ y=-\frac{6}{x}+2 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{6-2x}{x}\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{6}{x}-2 \\ y=-\frac{6}{x}+2 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x-3}{x}\leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{6}{x}-2 \\ y=-\frac{6}{x}+2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$+ \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$

$$\begin{cases} x\in(0;3] \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{6}{x}-2 \\ y=-\frac{6}{x}+2 \end{array}\right. \end{cases}$$

(2) $2x+2ay+a-6=0$

$2ay=-2x-a+6$

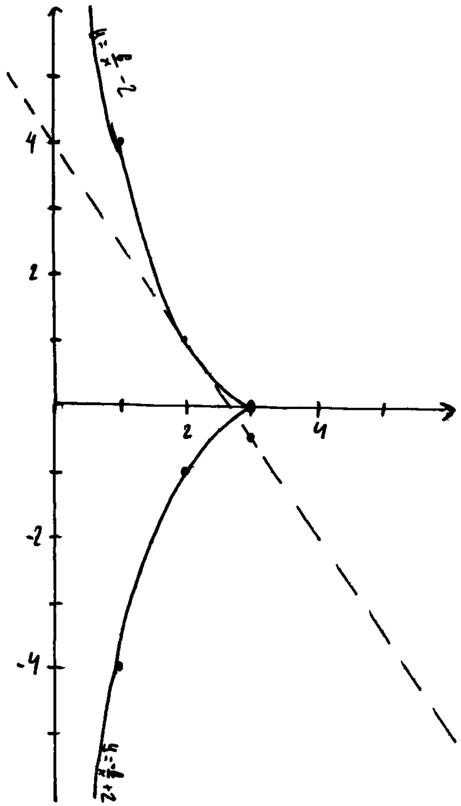
(I) $a=0$; $x=3$ (при этом сис-ма имеет 1 реш-е $\Rightarrow a=0$ удовлетв. усл-ю)

(II) $a\neq 0$; $2ay=-2x-a+6$

$$y=\frac{-2x-a+6}{2a}$$

$$y=-\frac{1}{a}x-\frac{a-6}{2a}=-\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}-\frac{1}{2}$$

заметим, что все прямые вида $y=-\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}-\frac{1}{2}$ проходят через точку с координатами $\left(3;-\frac{1}{2}\right)$



Задача сведена к исследованию расположения прямой и части гиперболы, дальнейшего продвижения нет.
Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 31)

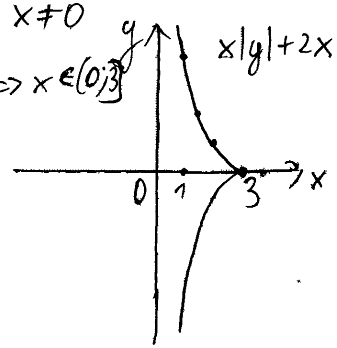
№ 18

Рассмотрим второе уравнение отдельно. Обратим внимание, что при изменении знака y переменная x не поменяет значение. Значит, график этого уравнения симметричен относительно Ox. Тогда решим его для случая $y \geq 0$ и построим график:

$xy + 2x - 6 = 0$ — При $x = 0$: $-6 = 0$ — неверно, решений нет

$xy = 6 - 2x \quad x \neq 0$

$y = \frac{6}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (0;3]$



$x|y| + 2x - 6 = 0$

Теперь обратимся к первому уравнению. Проверим $a = 0$: $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

Теперь ~~решим~~ преобразуем при условии, что $a \neq 0$:

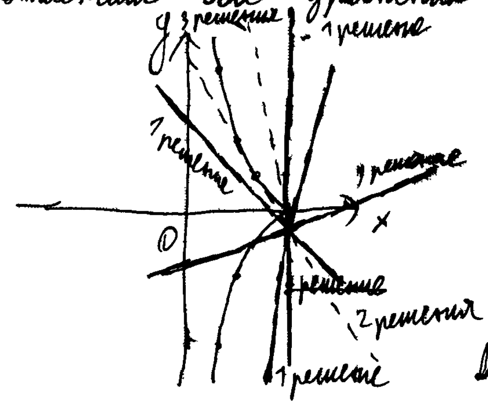
$2x + 2ay + a - 6 = 0 \Leftrightarrow 2ay = 6 - a - 2x \Leftrightarrow y = -\frac{x}{a} + \left(\frac{3}{a} - \frac{1}{2}\right)$

Обратим внимание, что при любом a на прямой будет лежать точка $\left(3; -\frac{1}{2}\right)$, т.к. $y = -\frac{1}{2} = -\frac{x}{a} + \frac{3}{a} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{a} + \frac{3}{a} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Следовательно, первое уравнение описывает семейство прямых, проходящих через точку $\left(3; -\frac{1}{2}\right)$ (за исключением горизонтальной).

№ 18 (продолжение)

Отметим оба уравнения на ~~одного~~ одном графике:



По рисунку видно, что более чем одно решение мы имеем в промежутке от касания верхней ветки модуля вплоть до $a=0$. Для того, чтобы найти, при каком a происходит касание, составим систему, обозначив за x_0 абсциссу точки касания, а за y_0 — её ординату:

$$\begin{cases} y_0' = \left(\frac{6}{x_0} - 2\right)' = -\frac{6}{x_0^2} = -\frac{1}{a} \\ y_0 = -\frac{x_0}{a} + \frac{3}{a} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x_0 \neq 0$, т.к. в этой точке второго графика не ~~существ~~ существует

$$\Leftrightarrow \frac{6}{x_0} - 2 = \cancel{\frac{6x_0}{x_0^3}} + \frac{18}{x_0^2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{12}{x_0} + \frac{18}{x_0^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 24x_0 + 36 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 8x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{x_0^2}{6} = \frac{4}{6} \\ x_0 = 6 \text{ — это решение отбрасываем, т.к. ООФ второго графика — } (0; 3] \end{array}\right.$$

Ответ: ~~$a \in (-\infty; 2) \cup [3; \infty)$~~ $a \in (-\infty; 0)$

Задача сведена к исследованию расположения прямой и части гиперболы, при решении потерян один из промежутков. По критериям такое решение оценивается в 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 32)

№18 $\begin{cases} 2x+2ay+a-3=0 & (1) \\ x|y|+2x-3=0 & (2) \end{cases}$

(1) $2x+a(2y+1)-3=0$ $\boxed{\text{Одно решение}}$

$2x=3-a(2y+1)$

$2x=3-2a(y+\frac{1}{2})$

$x=\frac{3}{2}-a(y+\frac{1}{2})$

(2) $x(|y|+2)=3$

$x=\frac{3}{|y|+2}$, так как $\underbrace{|y|}_{\geq 0}+2\neq 0$ (>0)

$\begin{cases} x=\frac{3}{2}-a(y+\frac{1}{2}) & (1) \\ x=\frac{3}{|y|+2} & (2) \end{cases}$

(1) $x=\frac{3}{2}-a(y+\frac{1}{2})$ – «крутящаяся» прямая вокруг точки $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ $y=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$

(2) если $y\geq 0$, то $x=\frac{3}{y+2}$ – гипербола с центром $(-2; 0)$ $y=-2$, $x=0$

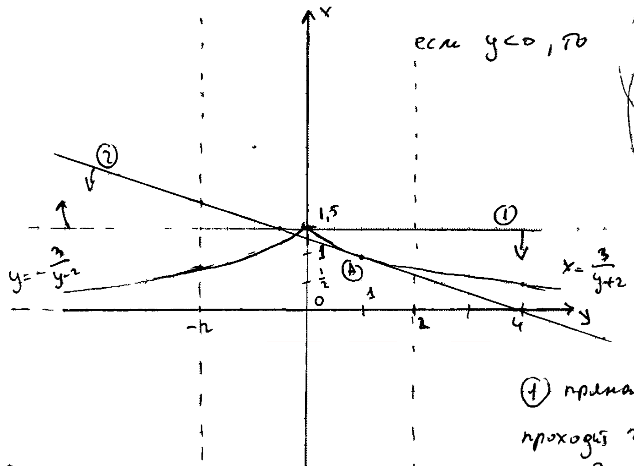
если $y<0$, то $x=-\frac{3}{y-2}$ – гипербола с центром $(2; 0)$ $y=+2$, $x=0$

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
y	1	4	0

в I и III четверти

x	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	0	-2	-1

в II и IV четверти



точка $y=0$ $x=\frac{3}{2}$ для гипербол общая.

(1) прямая $x=\frac{3}{2}-a(y+\frac{1}{2})$ проходит через точку $x=\frac{3}{2}$ $y=0$

$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-a(0+\frac{1}{2})$

$0=-a\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a=0}$

(2) прямая $x=\frac{3}{2}-a(y+\frac{1}{2})$ касается $x=\frac{3}{y+2}$ в 1 четверти $\Rightarrow D=0$

$\frac{3}{y+2}=\frac{3}{2}-a(y+\frac{1}{2})$

$3=(\frac{3}{2}-ay-\frac{a}{2})(y+2)$

$3=\frac{3}{2}y+3-ay^2-2ay-\frac{ay}{2}-a$

$-ay^2-2ay-\frac{ay}{2}-a+\frac{3}{2}y=0$

$ay^2+2ay+\frac{a}{2}y+a-\frac{3}{2}y=0$ $\rightarrow$

$$ay^2+y\left(2a+\frac{a}{2}-\frac{3}{2}\right)+a=0$$

$$ay^2+y\left(\frac{4a+a-3}{2}\right)+a=0$$

$$ay^2+y\,\frac{5a-3}{2}+a=0 \qquad D=\frac{(5a-3)^2}{4}-4a^2=\frac{25a^2-30a+9}{4}-4a^2=$$

$$=\frac{25}{4}a^2-\frac{30}{4}a+\frac{9}{4}-4a^2=\frac{(25-16)a^2}{4}-\frac{30}{4}a+\frac{9}{4}=0$$

$$\Rightarrow 9a^2-30a+9=0$$

$$3a^2-10a+3=0 \qquad D=100-9\cdot4=100-36=64$$

$$a_1=\frac{10+8}{6}=\frac{18}{6}=3 \qquad a_2=\frac{10-8}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

для $a=+\frac{1}{3}$ $y<0$

для $a=+3$ $y=1>0\Rightarrow$ $\boxed{a=+3}$

при $a\in(-\infty;-3)$ 1 решение

при $a=-3$ 2 решения

при $a\in(-3;0)$ 3 решения

при $a\in[0;+\infty)$ 1 решение

при $a\in[-\infty;0]$ 1 решение

при $a\in(0;3)$ 3 решения

при $a\in(3;+\infty)$ 1 решение

при $a=3$ 2 решения

Ответ: $a\in[-\infty;0]\cup(3;+\infty)$

Задача сведена к исследованию расположения прямой и части гиперболы, при решении один из промежутков найден неверно. По критериям такое решение оценивается в 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 33)

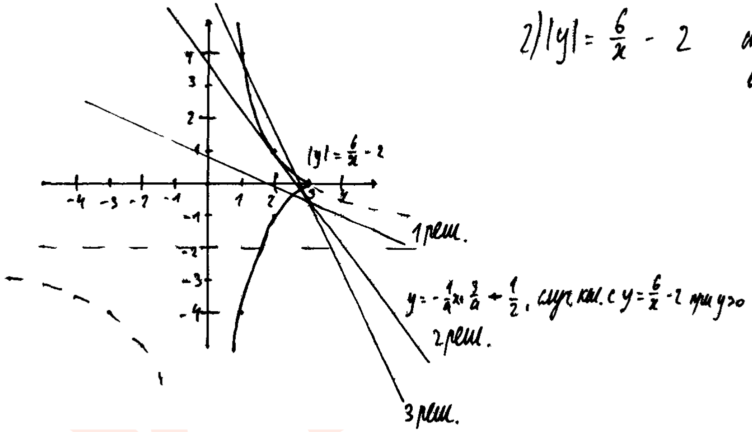
№ 18

$$\begin{cases} 2x+2ay+a-6=0 \\ x|y|+2x-6=0 \;\; |:x \end{cases}$$

$a - ?$, $=1$ реш.

Пр-ка: $x=0$; $\begin{cases} 2ay+a-6=0 \\ -6=0 \end{cases} \Rightarrow x, y \in \varnothing$, т.е. нет реш.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{a}x + \frac{3}{a} - \frac{1}{2} \\ |y| = \frac{6}{x} - 2 \end{cases}$$



1) $y = -\frac{1}{a}x + \frac{3}{a} - \frac{1}{2}$, $y(3) = -\frac{3}{a} + \frac{3}{a} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

строим пр., прох. ч. т. $(3; -\frac{1}{2})$ с угл. к. $-\frac{1}{a}$

2) $|y| = \frac{6}{x} - 2$ строим $y = \frac{6}{x} - 2$, убир. знач. $y<0$ и отр. верхн. полупл-сть отн. Ox

3) Случ. кас.:

$$\begin{cases} -\frac{1}{a}x + \frac{3}{a} - \frac{1}{2} = \frac{6}{x} - 2 \\ -\frac{1}{a} = -\frac{6}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{6}{x}\,{}^{\cdot 2x} + \frac{18}{x^2}\,{}^{\cdot 2} - \frac{1}{2}\,{}^{\cdot x} - \frac{6}{x}\,{}^{\cdot 2x} + 2\,{}^{\cdot 2x} = 0 \\ -\frac{1}{a} = -\frac{6}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-24x+38+3x^2}{x^2}=0 \\ -\dfrac{1}{a}=-\dfrac{6}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2-8x+12}{x^2}=0 \\ -\dfrac{1}{a}-\dfrac{6}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2;\ y(2)=\frac{6}{2}-2=1>0 \Rightarrow \text{подх.} \\ x=6;\ y(6)=\frac{6}{6}-2=-1<0 \Rightarrow \text{не подх.} \end{array}\right. \\ -\dfrac{1}{a}=-\dfrac{6}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ -\dfrac{1}{a}=-1,5 \end{cases}$$

Таким образом при ~~$a\in($~~ $-\frac{1}{a}\in(-\infty;-1,5)$ сист. им 3 реш., при $-\frac{1}{a}=-1,5$ сист. им 2 реш., при $-\frac{1}{a}\in(-1,5;+\infty)$ сист. им 1 реш.

$$-\frac{1}{a}>-1,5$$

$$\frac{-1,5a+1}{a}<0$$

~~$a\in(-\infty;0)\cup a\in(0;\frac{2}{3})$~~ $a\in(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty)$

Отв: $a\in$ ~~$(0;\frac{2}{3})$~~ $(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty)$

Задача сведена к исследованию расположения прямой и части гиперболы, при решении потеряна одна из граничных точек. По критериям такое решение оценивается в 3 балла.

Оценка эксперта: 3 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 34)

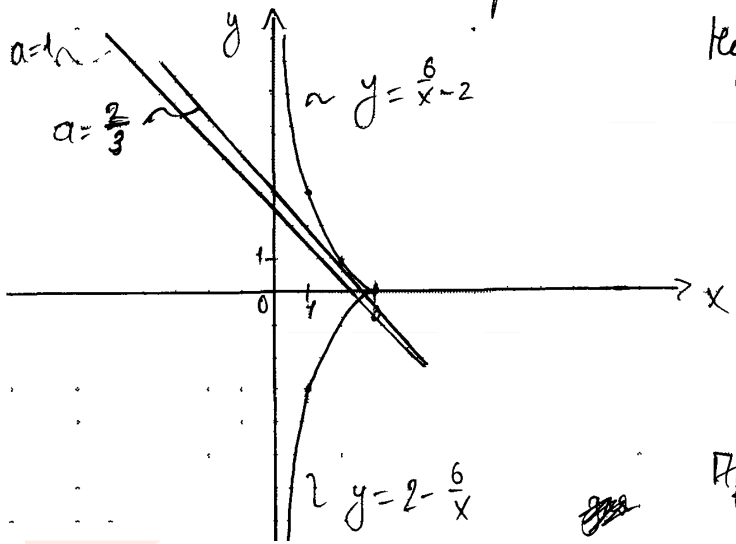
№18 Если $a=0$: $\begin{cases} 2x=6 \\ x|y|+2x=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ 3|y|=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ — одно решение — подходит

Если $a\neq 0$:

$$\begin{cases} 2ay=-2x+\frac{6-a}{1} \\ x|y|+2x-6=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{x}{a}+\frac{6-a}{2a} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geq 0 \\ xy=-2x+6 \quad (1) \end{cases} \\ \begin{cases} y<0 \\ -xy=-2x+6 \quad (2) \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{x}{a}+\frac{6-a}{2a} \quad (A) \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geq 0 \\ y=-2+\frac{6}{x} \quad (B) \end{cases} \\ \begin{cases} y<0 \\ y=2-\frac{6}{x} \quad (C) \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

(1), (2) — можно делить на x, т.к. при $x=0$: (1) $0=6$ — неверно; $0=6$ — неверно $\Rightarrow x\neq 0$

(A) — прямая, (B), (C) — ветви параболы обрезанной



Найдём, когда прямая касается верхней ветви.

$-\frac{x}{a}+\frac{6-a}{2a}=-2+\frac{6}{x} \quad |\cdot a$

$-x+\frac{6-a}{2}=-2a+\frac{6a}{x} \quad |\cdot 2x$

$-2x^2+6x-ax=-4ax+12a$

$-2x^2+6x+3ax-12a=0$

$2x^2-x(6+3a)+12a=0$

касание, когда $D=0$

$D=36+36a+9a^2-96a=9a^2-60a+36$

$D=0 \Leftrightarrow 3a^2-20a+12=0$

$D=400-144=256=16^2$

$a_{1,2}=\frac{20\pm16}{6}$ $\left[\begin{array}{l} a=\frac{2}{3} \\ a=6 \end{array}\right.$

~~При $a=6$ $y=-\frac{1}{6}x$ — не подходит т.к.~~

При $a=6$ найдём т. касания: $-\frac{x}{6}+\frac{6-6}{2\cdot 6}=-2+\frac{6}{x}$ $|\cdot 6x$

$-x^2=-12x+36$

$x^2-12x+36=0$

$x=6$ – не подходит по графику

При $a=\frac{2}{3}$: $-\frac{3}{2}x+\frac{6-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=-2+\frac{6}{x}$

$-\frac{3}{2}x+4=-2+\frac{6}{x}$ $|\cdot x$

$\cancel{2x}-\frac{3}{2}x^2=6$ $|\cdot 2$

~~$3x^2-26x+6=0$~~

~~$x^2-2x+2=0$~~

~~$x=2$~~

$3x^2-12x+6=0$ $|:3$

$x^2-4x+\cancel{2}=0$

$x=2$

Найдём, когда прямая касается нижней прямой:

$-\frac{x}{a}+\frac{6-a}{2a}=2-\frac{6}{x}$ $|\cdot a$

$-x+\frac{6-a}{2}=2a-\frac{6a}{x}$ $|\cdot 2x$

$-2x^2+6x-ax=4ax-12a$

$-2x^2+6x-5ax+12a=0$

$2x^2-x(6-5a)-12a=0$

касание, когда $D=0$

$D=36-60a+25a^2+96a=25a^2+36a+36$

$D=0 \Leftrightarrow 25a^2+36a+36=0$ – нет корней $\Rightarrow$ нижней ветки прямая не касается

Ур-е прямой: $y=\frac{-2x-a+6}{2a}=-\frac{x}{a}+\frac{6-a}{2a}$. Найдём, когда она проходит через ~~(0;3)~~ $(3,0)$: $0=\frac{-a}{2a} \Leftrightarrow \cancel{0=0}$ $\varnothing$

$\Rightarrow$ при отриц. a прямая имеет + угол наклона, не касается нижней ветки, не проx. через $(3,0)$ $\Rightarrow$ всегда имеет одно реш.;

при полож. a ~~на~~ отриц. угол наклона, при $a=\frac{2}{3}$ касание с веткой верхней. ~~$y=\frac{2(x-a+6)}{2a}$~~; до $(3;0)$ не доходит

При $a<0$ 1 реш
$a=0$ 1 реш
$0<a<\frac{2}{3}$ 2 реш
$a=\frac{2}{3}$ 2 реш
$a>\frac{2}{3}$ 1 реш

Ответ: $a\in(-\infty;0]\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$

Верное решение, выполнены все шаги.
Оценка эксперта: 4 балла.

ЗАДАНИЕ № 18 (ПРИМЕР 35)

18) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \geq 0 \\ 2x + 2ay + a - 6 = 0 \\ xy + 2x - 6 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ 2x + 2ay + a - 6 = 0 \\ -xy + 2x - 6 = 0 \end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \geq 0 \\ 2ay = -2x - a + 6 \\ xy = -2x + 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ 2ay = -2x - a + 6 \\ -xy = -2x + 6 \end{cases}\end{array}\right.$

I сл.-ай: $a = 0$: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \geq 0 \\ 0 = -2x + 6 \\ xy = -2x + 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ 0 = -2x + 6 \\ -xy = -2x + 6 \end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \geq 0 \\ x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 3 \end{array} \\ \begin{cases} y < 0 \\ x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y \in \varnothing \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ 1р.-е $(3, 0)$ -

II сл.-ай: $a \neq 0$: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \geq 0 \\ y = \frac{1}{a}(-x+3) - \frac{1}{2} \\ xy = -2x + 6 \mid : x \neq 0; \text{ Пр.-ка: } 0 \neq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ y = \frac{1}{a}(-x+3) - \frac{1}{2} \\ -xy = -2x + 6 \mid : (-x) \neq 0; \text{ Пр.-ка: } 0 \neq 6 \end{cases}\end{array}\right.$ $\begin{cases} y = \frac{1}{a}(-x+3) - \frac{1}{2} \text{ (пр.-я)} \\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \geq 0 \\ y = \frac{6}{x} - 2 \text{ (гипер.)} \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ y = -\frac{6}{x} + 2 \text{ (гипер.)} \end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$

$\frac{1}{a}(-x+3) - \frac{1}{2}$ прох. т.-з $(3; -\frac{1}{2})$ ~~при всех a~~ при всех $a \neq 0$: $\frac{1}{a}(-3+3) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{6}{x} - 2$:

x	1	2	3	6
y	4	1	0	$\cancel{-2}$ −1

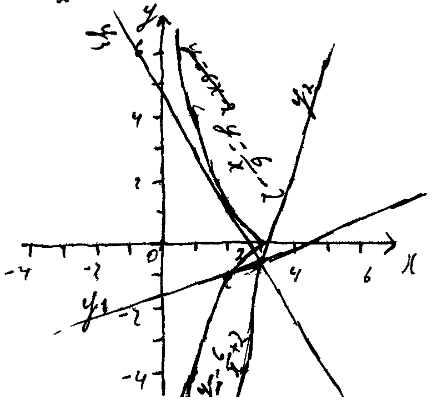
; $y = \frac{6}{x} - 2$] только при $y \geq 0$

$y = -\frac{6}{x} + 2$:

x	1	2	3	6
y	−4	−1	0	1

; $y = -\frac{6}{x} + 2$] только при $y < 0$

$y_1 = \frac{1}{a_1}(-x+3) - \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{1}{a_2}(-x+3) - \frac{1}{2}$; $y_3 = \frac{1}{a_3}(-x+3) - \frac{1}{2}$



При $a>0$: пр.-я идет из II в IV четв., если $a<a_3$ $\left(\frac{1}{a}>\frac{1}{a_3}\right)$, то $N_{к.-ей}=3$, если $a=a_3$ $\left(\frac{1}{a}=\frac{1}{a_3}\right)$, то $N_{к.-ей}=2$, если $a>a_3$ $\left(\frac{1}{a}<\frac{1}{a_3}\right)$, то $N_{к.-ей}=1$ $\Rightarrow$ при $a>0$ $a\in(a_3;+\infty)$

При $a<0$: пр.-я идет из ~~I ч. в III~~ ч. III ч. в I ч.; $N_{к.-ей}=1$ $\forall a$ $\Rightarrow$ при $a\in(-\infty;0)$

$y_3=\frac{6}{x}-2$

$\frac{1}{a_3}(-x+3)-\frac{1}{2}=\frac{6}{x}-2$

$\cancel{-\frac{x}{a_3}+\frac{3}{a_3}-\frac{6}{x}+\frac{1}{2}=0}$ $\quad -\frac{x}{a_3}+\frac{3}{a_3}-\frac{6}{x}-\frac{1}{2}+2=0$

$-x^2+3x-\frac{ax}{2}+2ax-6a=0$

$x^2+x(3+1{,}5a)+6a=0$

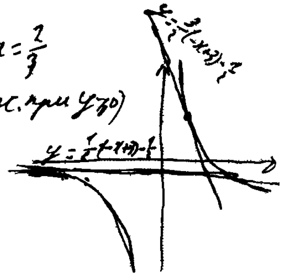
$D:\ 9+9a+2{,}25a^2-24a=2{,}25a^2-15a+9$

$D=0$ (пр.-я кас. гип.-и): $2{,}25a^2-15a+9=0$

$0{,}75a^2-5a+3=0$

$D=25-9=16=4^2$

$\left[\begin{array}{l} a=\frac{5+4}{1{,}5} \\ a=\frac{5-4}{1{,}5} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=\frac{2}{3} \end{array}\right.$ $\Rightarrow a=\frac{2}{3}$ (кас. при $y>0$)



$a>0$: $a\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$

$a<0$: $a\in(-\infty;0)$

$a=0$

~~Ответ~~: $a\in(-\infty;0]\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$

Задача решена верно. Один из промежутков для параметра полностью обоснован. Для второго промежутка недостаточно обосновано отбрасывание одно из точек касания, но это пояснено на чертеже. Решение оценивается в 4 балла.

Оценка эксперта: 4 балла.

Задание № 19.

Есть 4 камня, каждый массой 7 тонн, и 9 камней, каждый массой 22 тонны.

а) Можно ли разложить все эти камни на две группы так, чтобы разность суммарных масс камней в этих группах составила 8 тонн?

б) Можно ли разложить все эти камни на две группы, суммарные массы камней в которых равны?

в) Все камни хотят разложить на две группы. Какое наименьшее положительное значение (в тоннах) может принимать разность суммарных масс камней в этих группах?

Решение.

а) Сумма масс всех камней равна 226 тоннам. Если разность суммарных масс камней в двух группах составит 8 тонн, то суммарные массы камней в этих группах равны 117 тоннам и 109 тоннам. Если одна группа состоит из одного камня массой 7 тонн и пяти камней, каждый массой 22 тонны, а другая – из всех остальных камней, то суммарные массы камней в этих группах равны 117 тоннам и 109 тоннам соответственно. Разность этих масс составляет 8 тонн.

б) Предположим, что можно разложить камни на две группы так, чтобы суммарные массы камней в этих группах были равны. Тогда суммарная масса камней в каждой из этих групп составляет 113 тонн. Количество камней массой 7 тонн в каждой из групп не превосходит 4. Если убрать из первой группы все камни массой 7 тонн, то масса оставшихся камней составит 113, 106, 99, 92 или 85 тонн. Ни одно из этих чисел не делится на 22. Получаем противоречие. Следовательно, камни нельзя разложить на две группы так, чтобы суммарные массы камней в этих группах были равны.

в) Рассмотрим группу камней, суммарная масса камней в которой больше. Пусть эта масса составит M тонн и в этой группе n камней массой 7 тонн. Тогда $M > 113$, $0 \leq n \leq 4$. Для того чтобы разность суммарных масс камней в двух группах была наименьшей, нужно, чтобы число M было наименьшим. Оценим это число для каждого значения n от 0 до 4.

Если $n = 0$, то $M \geq 132$;

Если $n = 1$, то $M \geq 117$;

Если $n = 2$, то $M \geq 124$;

Если $n = 3$, то $M \geq 131$;

Если $n = 4$, то $M \geq 116$.

Таким образом, наименьшее значение M не меньше 116. Это значение достигается, если объединить в одну группу четыре камня, каждый массой 7 тонн, и четыре камня массой 22 тонны. В этом случае разность суммарных масс камней в двух группах составит 6 тонн.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Типичные ошибки

1) Необоснованные утверждения.

2) В пункте а) отсутствие примера (только описание, из которого нельзя однозначно понять его вид).

3) При решении перебором – потеря случаев (неполный перебор).
4) При решении пункта в) есть только пример и отсутствует оценка.

К сожалению, задания из разных вариантов отличаются по сложности. В одном из вариантов сумма масс всех маленьких камней была меньше массы одного большого, что сразу делало тривиальным решение пунктов б) и в).

№19)

а) Да, можно

Пример:

I группа	II группа
22 22 22	22 22
22 22	22 22
7	7 7 7
$m_I = 117$ тонн	$m_{II} = 109$ тонн

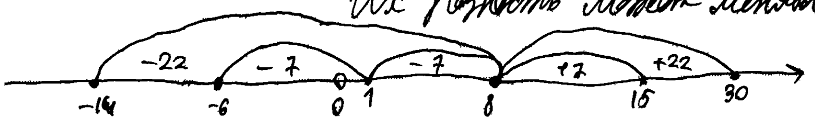
$m_I - m_{II} = 117 - 109 = 8$

б) Нет, нельзя

Возьмём 2 кучи с массами 117 и 109 тонн.

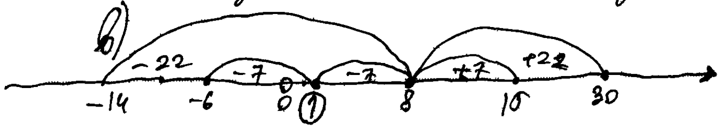
I 117 т. II 109 т.

Их разность может меняться либо на 7 либо на 22 т.



Таким образом, как бы мы не перекладывали камни, мы не можем сделать так, чтобы разность их масс была равна 0

в)



Мы видим, что min разность

Ответ: 1 тонна

Верно решен пункт а). В пунктах б) и в) идет только добавление и вычитание либо 7 тонн, либо 22 тонн, может случиться добавление или вычитание камней обоих типов. В пункте в) еще и ответ неверный.

Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 37)

№19

а) да, если в одной группе будет 3 по 7т и 4 по 22т, а во второй 1 по 7т и 5 по 22т, тогда суммарные массы составят 109т и 117т соответственно и их разность равна 8т

б) нет., т.к. общая масса камней 226 т ⇒ масса одной группы 113 кг. Пусть x камней по 7 тонн в группе I, тогда $(4-x)$ в II, и y по 22т получим ур-ие $7x+22y=113$, где $x \in [0;4]$ $y \in [0;9]$ и $x \in \mathbb{Z}$ $y \in \mathbb{Z}$, отсюда $x=\frac{113-22y}{7}$, при подстановке y из интервала $[0;9]$ при $y \in \mathbb{Z}$ x либо $\notin [0;4]$ либо $x \notin \mathbb{Z}$ ⇒ распределить камни таким образом нельзя.

1 за а

№19 а) допустим в первой куче будет 4 камня по 22 тонны и 3 камня по 7 тонн, тогда их общая масса: $4 \cdot 22 + 3 \cdot 7 = 21 + 88 = 109$ тонн.

тогда во второй куче 5 камней по 22 тонны и один камень 7 тонн, их масса: ~~110~~ $22 \cdot 5 + 7 = 110 + 7 = 117$

$117 - 109 = 8$ тонн

Ответ: Да.

б) Общая масса всех камней:

$4 \cdot 7 + 9 \cdot 22 = 226$ тонн; $\frac{226}{2} = 113$ тонн.

Самая близкая сумма камней к 113 тоннам это $22 \cdot 5 = 110$ тонн.

$110 \neq 113$

Ответ: нет.

в) Возьмем в первую кучу 4 камня по 22 тонны, а ~~во~~ вторую 5 по 22 тонны, тогда в первой будет 88 ~~тонн~~, во второй 110 тонн.

88+16=
=110

добавим в первую 4 камня по 7 тонн, ~~во~~ и тогда в ней будет 116 тонн.

116 − 110 = 6 тонн.

Ответ: 6 тонн.

Верно решен пункт а). В пункте б) результат не обоснован. В пункте в) только пример.
Оценка эксперта: 1 балл.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 38)

задача 19

а) да, можно

I группа:	II группа:
7 по 14 тонн	6 по 14 тонн
98 тонн	4 по 5 тонн
	104 тонны

98 тонн + 104 тонны = 202 (тонны) = 5·4 + 13·14 (тонн); 104 − 98 = 6 тонн

задание 19

б) нет, нельзя

если массы камней в 2 группах равны, то масса камней в каждой группе составляет 101 тонну. 101 - нечётное число => в каждой группе должно быть нечётное количество камней массой 5 тонн (иначе масса группы будет чётным числом). значит в одной из групп должен быть один камень массой 5 тонн, а в другой 3 таких камня. Таким образом масса оставшихся камней (по 14 тонн каждый камень) в одной группе составит 86, а в другой 96 тонн. Это невозможно, так как ни 86, ни 96 не делятся на 14. поэтому разложить камни на 2 равные по массе группы невозмож

Верно решены пункты а) и б). Пункта в) нет.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 39)

б) x-кол-во кам-й по 22т. в первой группе y-кол-во камней по 7т в II гр.

I группа	II группа
x кам по 22т. y кам по 7т. $\Big\}(22x+7y)$т.	$(9-x)$ кам. по 22т. $(4-y)$ кам по 7т. $\Big\}(226-22x-7y)$т.
$(22x+7y)$т.	$198-22x+28-7y=$ $=(226-22x-7y)$т.

Разность суммарных масс камней в группах:
т.к. массы равны $\Rightarrow$ их разность равна 0

$22x+7y-226+22x+7y=44x+14y-226=0$

~~$44x+14y-226=0$~~
~~$44x+14y=234$~~

$44x+14y=226$

$2(22x+7y)=113\cdot 2$

$22x+7y=113$

Тогда y должен быть или 1 или 3, потому что иначе правая часть будет четной, что невозможно

$y=1$

$22x+7=113$

$22x=106$

$x=\frac{106}{22}=\frac{53}{11}$

x не может быть не целым

$y=3$

$22x+7\cdot 3=113$

$22x=92$

$x=\frac{92}{22}=\frac{46}{11}$

x не может быть не целым.

Значит массы камней в обоих группах не могут быть равны. Нет.

а) Да. В I группе: 4 камня по 22т., 3 камня по 7т. $\}$ $88+21=109$

Во II группе: 5 камней по 22т, 1 камень по 7т $\}$ $110+7=117$

$117-109=8$ тонн.

в) x – кол-во камней по 22 т. в I группе
y – кол-во кам-й по 7 т в I группе

$$\text{I}: \left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} (22x+7y) \text{ т.} \qquad \text{II}: \left.\begin{matrix} 9-x \\ 4-y \end{matrix}\right\} (226-22x-7y) \text{ т.}$$

$$(9-x)\cdot 22 + (4-y)\cdot 7 = 198-22x+28-7y = 226-22x-7y$$

Разность масс в группах
$22x+7y-226+22x+7y = 44x+14y-226$ – min

Для этого $44x+14y$ должно быть наименьшим.
При этом $44x+14y-226 \geq 0$
$44x+14y \geq 226.$

Переберем ~~наименьшие~~ x и y, где $\begin{cases} x \leq 4 \\ y \leq 4 \end{cases}$

x	y	$44x+14y$	
1	1	$44+14=58<226$	не подходит.
2	1	$88+14=102<226$	не под-т
1	2	$44+28=72<226$	не под-т
2	2	$88+28=116<226$	не под-т
1	3	$44+42=86<226$	не под-т
3	1	$132+14=146<226$	не под-т
2	3	$88+42=130<226$	не под-т
3	2	$132+28=160<226$	не под-т
3	3	$132+42=174<226$	не под-т
1	4	$44+56=100<226$	не под-т
2	4	$88+56=144<226$	не под-т
3	4	$132+56=188<226$	не под-т
4	1	$176+14=190<226$	не под-т
4	2	$176+28=204<226$	не под-т
4	3	$176+42=218<226$	не под-т
4	4	$176+56=232>226$	подходит.

При дальнейшем увеличении x и y $(44x+14y)$ будет увеличиваться, поэтому дальше не перебираем

Тогда: I гр.: $\left.\begin{matrix}\text{4 камня по 22} \\ \text{4 камня по 7}\end{matrix}\right\} 88+28=116$

II гр: 5 камней по 22 – 110

Разность: $116-110=6.$

Ответ: а) Да б) Нет в) 6

Верно решены пункты а) и б). В пункте в) не рассмотрены случаи $x = 0$, $y = 0$, $x \geq 5$.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 40)

№19 а) Камни по 7 тонн и 9 по 22т ⇒

⇒ общая сумма $4\cdot7+9\cdot22=28+198=226$ ⇒ $2x+8=226$

$2x=218$

$x=109$ – масса кучи А

→ совпало

куча А = x

куча В = $x+8$ } разность 8

куча А: 3 камня по 7 и 4 по 22 = $3\cdot7+4\cdot22=21+88=109$

куча В: 1 по 7 и 5 по 22 = $7+5\cdot22=7+110=117$

$117-109=8$ ⇒ да, можно, если в 1 куче будет 3 камня по 7т и 4 по 22т, а во 2ой куче 1 по 7т и 5 по 22т

Ответ: да

б) Камни по 7 и 9 по 22т ⇒ сумма = 226т ⇒

⇒ поровну – это по 113т, тогда проверим все случаи кучи

куча А:

Если взять: 1 по 7 ⇒ $113-7=106 \not\vdots\, 22$ (а ост. по 22)

2 по 7 ⇒ $113-14=99 \not\vdots\, 22$ (а ост. по 22)

3 по 7 ⇒ $113-21=92 \not\vdots\, 22$ (а ост. по 22)

4 по 7 ⇒ $113-28=85 \not\vdots\, 22$ (а ост. по 22)

0 по 7 ⇒ $113 \not\vdots\, 22$ (а ост. по 22)

⇒ нельзя набрать камней по 22т ⇒ нет случая, чтобы набрать половину от общей массы (113т) ⇒

⇒ невозможно

Ответ: нет.

в) ~~проверим~~ ~~все разности~~ Разность всегда чётная, т.к.

$226 -$ нечёт $=$ нечет $\not\vdots\ 2 \Rightarrow$ точно нельзя собрать кучку.
аналогично проверим все случаи, как в пункте б.

разность $= 2$:

$(226-2):2 = 112 \not\vdots\ 22$
$112-7=105 \not\vdots\ 22$
$112-14=98 \not\vdots\ 22$
~~$112-21=91$~~
$112-21=91 \not\vdots\ 22$
$112-28=84 \not\vdots\ 22$
$\Rightarrow$ нет

разность $= 4$:

$(226-4):2 = 111 \not\vdots\ 22$
$111-7=104 \not\vdots\ 22$
$111-14=97 \not\vdots\ 22$
$111-21=90 \not\vdots\ 22$
$111-28=83 \not\vdots\ 22$
$\Rightarrow$ нет

разность 6:

Верно решены пункты а) и б). В пункте в) проверяется на делимость на 22, но в кучке могут быть камни обоих типов.

Оценка эксперта: 2 балла.

ЗАДАНИЕ № 19 (ПРИМЕР 41)

19 4 камня 7 тонн

9 камней 22 тонны

а) да, например

| 4 камня по 22
| 3 камня по 7

| 5 камней по 22
| 1 камень по 7

4к+5к=9
3к+1к=4

$4\cdot 22+3\cdot 7$ = 109

$5\cdot 22+7$ = 117

117−109= 8 тонн

б) Есть всего 3 варианта, как можно разложить 4 камня по 7 тонн, рассмотрим все

1 гр ① 2 гр
1к 7т 3к 7т
тогда разность масс = 14 тонн, но её не получится уровнять камнями по 22 тонны, т.к они дают разность 22, 66 и дальше
Нет

1 гр ② 2 гр
2к 7т 2к 7т
тогда массы будут =, но так как камней по 22 тонны нечётное число, то в 1 из групп будет на 1 камень по 22 тонны больше ⇒ масса ≠

1 гр ③ 2 гр
4к 7т 0к 7т
тогда масса разность масс = 28 тонн, но её не получится уравнять камнями по 22 тонны, т.к они дают разность 22 или 66 ≠ 28 и дальше

Если делим группы 4к по 22т и 5к по 22т, то разность 22
Если делим группы 3к по 22т и 6к по 22т, то разность 66
Если 2к по 22т и 7к по 22т, то разность 110
и т.д дальше

ни одно из чисел не кратно 7 ⇒ Нет

б) минимальная разность групп если разложить камни только по 22 тонны = 22 (4к и 5к)

Все разности если разложить только камни по 7 тонн

1) 2к и 2к разность: 0
2) 3к и 1к разность: 14
3) 4к и 0к разность = 28

переберём все комбинации миним. разности (22т) и всех разностей (7т)

22 − 14 = 8
28 − 22 = 6 – мин разность между группами
22 − 0 = 22
22 + 14 = 36
22 + 28 50

Если взять не мин. разность камней по 22 тонны
66 тонн (3к 6к)
тогда даже при макс. разности 7тонных камней (28) разность групп = 66 − 28 = 38 > 6 => не подх

Если берём разность 22 тонных камней ещё больше, то разность групп будет ещё больше

Ответ: 6

Верно решены все пункты.

Оценка эксперта: 4 балла.

3.2.3. Анализ метапредметных результатов обучения, повлиявших на выполнение заданий КИМ

Сформированность метапредметных результатов обучения является необходимым условием успешной сдачи ЕГЭ по всем предметам, в том числе и математике. Низкая решаемость некоторых заданий, особенно базового уровня сложности, является индикатором того, что некоторые выпускники имеют дефицит метапредметных результатов обучения. Анализ типовых ошибок позволил нам сделать вывод о низком уровне сформированности следующих универсальных действий (УУД).

Среди *познавательных УУД* – ряд базовых исследовательских действий, а именно:

- овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов;
- выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения;
- анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях;
- уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; уметь интегрировать знания из разных предметных областей;
- способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания.

Среди *регулятивных УУД* – давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям.

Укажем типичные ошибки и задания КИМ, неуспешность выполнения которых обусловлена слабой сформированностью выделенных метапредметных умений.

Задания № 5. С данным заданием справилось ***48,6 %.***

Наиболее распространенный неверный ответ – 0,147 (10 %), вероятность того, что две лампы перегорят, а одна – нет. Это только один из возможных вариантов.

Наиболее вероятными причинами неверного ответа является несформированность следующих умений:

– умения моделировать реальную ситуацию на языке теории вероятностей;

– умения осуществлять полный перебор вариантов событий;

– умения вычислять вероятность противоположного случайного события;

– вычислительных умений.

Ошибки, допущенные при решении задачи, показывают, что выпускники, не справившиеся с решением данной задачи, не овладели следующими универсальными учебными действиями:

способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

способность анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях.

Задание № 9. С данным заданием справилось ***59,1 %*** участников экзамена. Самый распространенный неправильный ответ – 1,5 (12 %) получается, если ответ записать в часах. Ошибка, приведшая учащихся к неправильному ответу, указывала на невнимательность к тому, в каких единицах требуется записать ответ.

Наиболее вероятными причинами неверных ответов являются:

– невнимательность при прочтении условия задачи;

– несформированность умения работать с формулой как математической моделью реальной ситуации;

– вычислительные ошибки.

Ошибки, допущенные при решении задачи, показывают, что выпускники, не справившиеся с решением данной задачи, не овладели следующими универсальными учебными действиями:

способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

способность анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях;

умение переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; умение интегрировать знания из разных предметных областей;

умение давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям.

Задания № 10. С данным заданием справилось ***63,3 %*** участников экзамена. Самый распространенный неправильный ответ – 32 (14 %) – среднее арифметическое чисел из условия, что показывает непонимание условия или неумение решать задачи на совместную деятельность.

Наиболее вероятными причинами неверного ответа можно предполагать:

– несформированность умений вычислять совместную производительность путем введения условной единицы при арифметическом методе решения задачи;

– неверная интерпретация условия задачи;

– вычислительные ошибки.

Ошибки, допущенные при решении задачи, показывают, что выпускники, не справившиеся с решением данной задачи, не овладели следующим универсальным учебным действием:

способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания

Задания № 16. С данным заданием справилось ***19,4 %*** участников экзамена. Причинами неверных ответов чаще всего являлась ошибки в построении модели.

Ошибки, допущенные при решении задачи, показывают, что выпускники, не справившиеся с решением данной задачи, не овладели следующими универсальными учебными действиями:

овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов;

умение выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения;

умение анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях;

умение переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; умение интегрировать знания из разных предметных областей;

способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

умение давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям.

В целом процент выполнения заданий второй части ЕГЭ (№ 13 – 35,5 %, № 14 – 2,3 %, № 15–21,1 %, № 16 – 19,4 %, № 17 – 4,6 %, № 18 – 1,1 %, № 19 – 14,4 %) говорит о том, что выпускники, не справившиеся с решением данных задач, не овладели следующими универсальными учебными действиями:

умение выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения;

умение анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях.

3.2.4. Выводы об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:

Элементы содержания

На базовом уровне можно считать сформированными следующие элементы содержания (для школьников региона)

- Числа и вычисления (Действия с действительными числами, корни, степени)
- Уравнения и неравенства (Целые, дробно-рациональные, иррациональные уравнения)
- Функции и графики (Степенная и показательная функции)
- Геометрия. Планиметрия, стереометрия (базовый уровень)

Недостаточно сформированы элементы содержания (для школьников региона)

- Числа и вычисления (Элементы тригонометрии)
- Вероятность и статистика (Вероятность)
- Начала математического анализа

Сделанные замечания и представленные статистические данные показывают, что о сформированности разделов на повышенном и тем более высоком уровнях говорить нельзя.

Умения, виды деятельности

Успешно усвоенными умениями на базовом уровне можно считать (для школьников региона):

- Умение решать уравнения и неравенства
- Умение строить и исследовать простейшие математические модели
- Умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

Недостаточно усвоенные умения, виды деятельности:

- Умение строить и исследовать простейшие математические модели
- Умение выполнять действия с функциями

Элементы содержания и умения (по подгруппам)

- Для группы участников, не достигших минимального балла (13,1% от общего числа участников), нельзя выделить сформированные умения и элементы содержания.

- Для группы участников с результатами от минимального до 60 т. б. (41,6 %) можно считать сформированными указанные умения и элементы содержания на базовом уровне, которые выделены для всех участников в целом.
- Для группы участников с результатами от минимального от 61 т. б. до 80 т. б. (34,1 %) все основные элементы содержания и умения сформированы на базовом уровне.
- Для группы участников с результатами от минимального от 81 т. б. до 100 т. б. (11,3 %) все основные элементы содержания и умения сформированы на базовом уровне. Раздел «Геометрия» нельзя считать сформированным на повышенном уровне (15,6 % выполнения задания № 14, 31,7 % выполнения задания № 17). Раздел «Уравнения и неравенства» сформирован на повышенном, но не высоком уровне (8,7 % выполнения задания № 18).

Выводы об изменении успешности выполнения заданий разных лет по одной теме / проверяемому умению, виду деятельности

Существенных изменений нет. См. пояснения в таблице ниже.

Умение выполнять действия с геометрическими фигурами	Результаты по планиметрии и стереометрии в 2024 году на базовом уровне практически не изменились. Задание по планиметрии (№ 1) – процент выполнения понизился с 73 до 71, по стереометрии (№ 3 в 2024-м, № 2 в 2023 году) понизился с 83 до 82,2. На повышенном уровне проценты выполнения традиционно низкие (стереометрическая задача: 1,2 % в 2023 году, 2,3 % в 2024 году; планиметрическая задача: 0,8 % в 2023 году, 4,6 % в 2024 году). Уровень освоения не изменился.
Умение выполнять действия с функциями	На базовом уровне соответствующие задания выполнены. Наиболее трудным оказалось задание № 8 (44,5 % в 2024 году). Поскольку трудности решения алгебраических заданий второй части часто связаны с плохим пониманием тригонометрических, логарифмических, показательных функций, вопросов исследования функций, то считаем, что это действие нельзя отнести к достаточно сформированным, как и в 2023 году.
Умение решать уравнения и неравенства	Успешно освоены элементы содержания базового уровня (№ 5 – 95,4 % в 2023 году, № 6 – 96,6 % в 2024 году). Анализ выполнения заданий повышенного уровня дают неоднозначен. Проценты выполнения задания повышенного уровня № 13 на решение тригонометрического уравнения немного повысились (32,1 в 2023 году, 35,5 в 2024 году). Существенно увеличились проценты выполнения задания № 15 (8,8 % в 2023 году, 21,1 % в 2024 году). Не считаем возможным связывать это повышение с улучшением подготовки участников экзамена. В 2023 году школьникам было предложено логарифмическое неравенство, требующее более серьезного уровня владения алгебраической техникой (для анализа ОДЗ,

	применения свойств логарифмов), чем в 2024 году. Это иллюстрируют проценты выполнения задачи с параметром (2,9 в 2023 году, 1,1 в 2024 году). Никакого существенного изменения не наблюдается.
Умение строить и исследовать математические модели. Умение использовать приобретенные навыки в повседневной жизни	Мы видим, что задания, направленные на проверку этих умений, решаются на базовом уровне, когда для составления математической модели требуются элементарные математические средства: № 10 (задача на совместную работу, процент выполнения в 2023 и 2024 годах чуть больше 60 %). № 9 (в практико-ориентированной задаче выполнить вычисления по заданной формуле: 57,2% в 2023 году, 59,1% в 2024 году). Усложнение модели влечет понижение процента выполнения: № 19 (12,7 в 2023 году, 14,4 в 2024 году). Существенный рост процента выполнения одного экономического задания вряд ли свидетельствует о неожиданном росте математических знаний в области экономических приложений, а скорее объясняется сильным упрощением модели.

Выводы о связи динамики результатов проведения ЕГЭ с использованием рекомендаций для системы образования Иркутской области и системы мероприятий, включенных с статистико-аналитические отчеты о результатах ЕГЭ по учебному предмету в предыдущие 2-3 года

Как отмечено выше, качественные изменения результатов отсутствуют. Наблюдается рост элитной группы участников, показавших более высокий результат (от 81 до 100 баллов: от 2,2 % в 2023 году до 11,3 % в 2024 году) и рост группы участников экзамена, не набравших минимальный балл (от 9,6 % в 2023 году до 13,1 % в 2024 году). Однако мы писали в 2.5, что позитивные изменения склонны связывать с изменением шкалы перевода баллов и некоторым упрощением математических моделей в задачах повышенного уровня сложности (№ 15, № 16), что позволило обучающимся «среднего» уровня получить дополнительные 1–4 первичных балла.

Рост группы школьников, не набравших минимальный балл (несмотря на то, что задания базового уровня примерно сохранили уровень сложности), свидетельствует о системных проблемах в образовании Иркутской области.

Раздел 4. РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ

4.1. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета в Иркутской области на основе выявленных типичных затруднений и ошибок

4.1.1. …по совершенствованию преподавания учебного предмета всем обучающимся

- *Учителям*

1) В п. 3.2.4 были выявлены **предметные дефициты участников экзамена**: часть элементов содержания сформированы только на базовом уровне (геометрия, функции и графики, уравнения и неравенства), некоторые разделы нельзя считать достаточно сформированными даже на базовом уровне (начала математического анализа, вероятность и статистика, числа и вычисления). Если подытожить, то основные проблемы обучающихся даже при выполнении заданий базового уровня связаны с применением математических конструкций более высокого уровня абстракции. Например, осуществление тригонометрических преобразований в задании № 7, исследование функции с помощью производной в задании № 8, понимание понятия полной группы событий в задании № 5 и т. д. Рекомендуем уделять серьезное внимание теоретической подготовке обучающихся.

В современной школьной практике нередко учитель разбирает с обучающимися только формулировки геометрических теорем, «правила» построения графиков отдельных видов функций и т. д. Многие школьники не знают авторов учебников, по которым учатся, и не читают эти учебники. Считаем это крайне отрицательным фактором. Теоретические работы должны стать постоянной частью образовательной практики.

2) В п. 3.2.3 выделены **метапредметные действия**, несформированность которых сказалась на качестве выполнения заданий обучающимися. Среди указанных метапредметных действий ведущее место занимают **базовые логические и исследовательские действия**, например, «выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения», «овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов» и др. Для целенаправленного формирования этих метапредметных действий рекомендуем обучать методам решения заданий по основным разделам школьной математики, делая акцент на понимании ключевых логических схем в этих методах. Выполнение исключительно алгоритмических задач не будет способствовать обучению школьников умению преобразовать информацию, умению самостоятельно выделить существенные связи между математическими объектами.

3) Для формирования **регулятивного метапредметного действия «**давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям» (**самоконтроль**), требуется проводить со школьниками логический анализ содержания

задачи, в процессе которого происходит сопоставление математической модели задания и текста задания, рассматривается требование задачи, происходит интерпретация результатов, полученных в результате преобразования математической модели.

4) Для **развития саморегулирования обучающихся** «сформированность саморегулирования, умение понимать ответственность за свое поведение, инициативность…» (эмоциональный интеллект) рекомендуем следующие меры:

- Обучать использованию интернет-ресурсов, на которых представлена нормативная информация по организации ЕГЭ и методические рекомендации по подготовке к ЕГЭ (сайты «ФИПИ», «ЦОПМКиМКО»). Обучающиеся должны представлять процедуру экзамена, процедуру просмотра личных результатов, апелляции. Должны быть рассмотрены следующие вопросы. Какие требования к оформлению заданий (можно объяснять при рассмотрении соответствующих заданий с рассмотрением типичных ошибок), какова процедура перевода первичных баллов в тестовые (ряд школьников не понимает ценности каждого первичного балла и небрежно относятся к выполнению заданий первой части), как организовать самопроверку своих ответов, как происходит апелляция (до сих пор на апелляции попадаются участники, апеллирующие правильность федеральных ответов первой части).
- Использовать возможности электронного банка заданий РЭШ для оценки математической грамотности, разработанных ФГБНУ ИСРО РАО для подготовки обучающихся к ЕГЭ на профильном уровне.
- Важной представляется профессиональная ориентация обучающихся, выходящая за рамки деятельности учителя математики. Обучающиеся часто плохо представляют себе поступление в вуз, выбор специальности, выбирают предметы для сдачи ЕГЭ не совсем осознанно. Считаем полезным при профессионализации школьников не только рассказывать о возможных профессиях, а кроме того, показывать сайты региональных и центральных вузов, списки специальностей, списки обязательных на данный момент предметов, проходные баллы, учебные планы. Это сделает более осознанным выбор экзаменов, более ответственным отношение к подготовке и положительно скажется на качестве учебного процесса.

o *Администрациям образовательных организаций*

В рамках реализации программы воспитания, проведения внеурочны занятий для подготовки обучающихся к ЕГЭ на базовом уровне рекомендуется организация и проведение в школе мероприятий, направленных на популяризацию математических знаний (интеллектуальные конкурсы, творческие проекты и пр.) и их применение на практике (практические и лабораторные работы на местности, индивидуальные проекты).

o *ИПК/ИРО, иным организациям, реализующим программы профессионального развития учителей*

– Выявленные предметные дефициты участников экзамена (3.2.3, 3.2.4) нередко связаны с соответствующими дефицитами в профессиональной подготовке учителей. Рекомендуем организовывать поддержку дополнительного образования учителей в рамках курсов повышения квалификации по вопросам математического образования, в рамках конкурсов профессионального мастерства.

– Организация систематической работы по подготовке к ОГЭ и ЕГЭ для мотивированных школьников из различных регионов Иркутской области, чтобы предоставить возможность заинтересованным обучающимся получить хорошую подготовку в условиях дефицита кадров учителей. Разработать и реализовать в 2024 году модуль повышения квалификации, направленный на ознакомление педагогов региона с особенностями подготовки обучающихся к ЕГЭ на профильном уровне.
– В рамках деятельности регионального консультационного центра для оказания методической помощи педагогам и муниципальным методическим службам в содержание индивидуальных и групповых консультаций для педагогов и муниципальных координаторов подготовки обучающихся к ЕГЭ на профильном уровне.
– При координации деятельности профессионального педагогического сообщества «Математика» акцентировать внимание на значимость использования электронных образовательных ресурсов, их роли в осмыслении и систематизации образовательной деятельности педагогов в рамках подготовки обучающихся к ЕГЭ на профильном уровне.
– В целях пополнения регионального банка лучших практик по вопросам преподавания математики выявлять и масштабировать эффективный опыт подготовки обучающихся к ЕГЭ на профильном уровне в школах и муниципальных образованиях Иркутской области.

4.1.2. …по организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки

- *Учителям*
    - Обучающиеся **с низким и средним уровнем подготовки**. Если в силу обстоятельств школьник имеет невысокий уровень подготовки, в первую очередь, он должен представлять себе, на каком уровне знаний он находится и что он может достичь за оставшийся период. Эти *регулятивные действия* очень важны для организации осознанной деятельности по подготовке к экзамену. Один из механизмов, который при этом следует использовать, – разъяснение структуры и содержания экзамена, описанное нами в пункте 4.1.1., следует запланировать работу над определенными заданиями и добиваться их досконального понимания, постоянно тренируясь в выполнении заданий со стандартного и нестандартного характера.
    - Обучающиеся **с высоким уровнем подготовки** успешно справятся с экзаменом. Рекомендуем в обучении таких школьников максимально раскрывать логическую составляющую математики, так как именно ее понимание может сыграть положительную роль в их будущей профессиональной подготовке. Заметим, что для обучения школьников методам решения заданий высокого уровня сложности учитель сам должен уверенно владеть этими методами.

- При составлении учебного плана для 10–11-х классов провести разделение обучения на базовый и профильный уровни обучения математике.

- *Администрациям образовательных организаций*

  Многие выпускники школ, студенты, имеющие довольно высокий уровень мотивированности в обучении, замечают, что в школе их в принципе не готовили к решению заданий второй части. Рекомендуем поддерживать создание и реализацию программ в рамках основного и дополнительного образования для ликвидации математической безграмотности и для продвинутого обучения (возможна организация работы с разновозрастными группами).

- *ИПК/ИРО, иным организациям, реализующим программы профессионального развития учителей*

  Реализация программ дополнительного образования для обучающихся разного уровня подготовки.

  Реализация программ повышения квалификации для учителей математики, в различных разделах которых рассматриваются задания ЕГЭ.

  Мы рекомендуем не сводить обучение к рассмотрению «лайфхаков» для решения задач как у школьников, так и учителей. К сожалению, не всегда учителя, преподаватели понимают, что невозможно обучить даже основам математики, рассматривая только наборы алгоритмов. Для решения заданий повышенного, высокого, а как показывает анализ в 3.2.4, даже базового уровня сложности (например, по теории вероятностей, по математическому анализу) требуется достаточная теоретическая подготовка.

4.2. Рекомендации по темам для обсуждения / обмена опытом на методических объединениях учителей-предметников для включения в региональную дорожную карту по развитию региональной системы образования

- Результаты ЕГЭ по математике (базовый и профильный уровни) в 2024 году: задания, решения, типовые ошибки, система оценивания
- Геометрические задания в содержании ОГЭ, ЕГЭ и математических олимпиад для школьников
- Пропедевтика геометрии в 4–6-х классах общеобразовательной школы. Наглядная геометрия
- Логика и комбинаторика в содержании ОГЭ, ЕГЭ и математических олимпиад для школьников
- Алгебра: задания повышенного уровня сложности в содержании ОГЭ и ЕГЭ по математике
- Вероятность и статистика: математические основы и вопросы методики преподавания
- Начала анализа в школьном курс математики: математические основы и вопросы методики преподавания

4.3. Рекомендации по возможным направлениям повышения квалификации работников образования для включения в региональную дорожную карту по развитию региональной системы образования

- Дополнительные главы геометрии (алгебры, комбинаторики)
- Элементы теории вероятностей и математической статистики в школьном курсе математики
- Элементы математического анализа в школьном курсе математики
- Методические вопросы преподавания математики в школе на углубленном уровне
- Методы решения математических задач повышенной сложности при подготовке к профильному ЕГЭ по математике и математическим олимпиадам
- Методика оценивания заданий ОГЭ и ЕГЭ по математике
- Использование математических пакетов для визуализации математических объектов, их свойств и отношений (GeoGebra, Maple, MathCAD и др.)